Ziel dieser Herleitung ist es, die Bestimmungsstücke einer Hyperbel **hyp** (a,b) mit denen einer Geraden **g** (k,d) in Verbindung zu bringen, um die Tangentenberechnung zu erleichtern. Gegeben sind die allgemeine Hyperbelgleichung **hyp** und die allgemeine Geradengleichung **g** in Hauptform (um die Steigung k und den Achsenabschnitt d ablesen zu können).

Hyperbelgleichung[1] $\text{hyp}: b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, Geradengleichung $g: y=k\cdot x+d$
Nun wird die Geradengleichung in die Hyperbelgleichung eingesetzt (Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten nach der Einsetzmethode).

$$\begin{aligned}
b^2x^2-a^2\cdot(k\cdot x+d)^2 &= a^2b^2\\
b^2x^2-a^2\cdot(k^2x^2+2\cdot dkx+d^2) &= a^2b^2\\
b^2x^2-a^2k^2x^2-2\cdot a^2dkx-a^2d^2 &= a^2b^2\\
\underbrace{(b^2-a^2k^2)}_{A}\cdot x^2\underbrace{-2\cdot a^2dk}_{B}\cdot x\underbrace{-(a^2d^2+a^2b^2)}_{C} &= 0
\end{aligned}$$

Um nun die Lösung, sprich jene Punkte die die Hyperbel **hyp** und die Gerade **g** gemeinsam haben, zu bestimmen, kann die obige quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel aufgelöst werden.

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{(-B)^2-4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}=\frac{2\cdot a^2dk\pm\sqrt{\underbrace{(-2\cdot a^2dk)^2-4\cdot(b^2-a^2k^2)\cdot(-(a^2d^2+a^2b^2))}_{\text{Diskriminante } D}}}{2\cdot(b^2-a^2k^2)}$$

Soll es nur eine Lösung, also einen einzigen Berührpunkt[2] geben, muss die **Diskriminante[3] *D* gleich Null** sein!

$$\begin{aligned}
D &= 0\\
(-2\cdot a^2dk)^2-4\cdot(b^2-a^2k^2)\cdot(-(a^2d^2+a^2b^2)) &= 0\\
(-2\cdot a^2dk)^2-4\cdot(b^2-a^2k^2)\cdot(-a^2d^2-a^2b^2) &= 0\\
4\cdot a^4d^2k^2-4\cdot(-a^2b^2d^2-a^2b^4+a^4d^2k^2+a^4b^2k^2) &= 0\\
4\cdot a^4d^2k^2+4\cdot a^2b^2d^2+4\cdot a^2b^4-4\cdot a^4d^2k^2-4\cdot a^4b^2k^2 &= 0\\
4\cdot a^2b^2d^2+4\cdot a^2b^4-4\cdot a^4b^2k^2 &= 0
\end{aligned}$$

Division durch $4\cdot a^2b^2$ mit $a\neq 0$ und $b\neq 0$ [4] liefert:

$$\begin{aligned}
d^2+b^2-a^2k^2 &= 0\\
d^2 &= a^2k^2-b^2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Herleitung $\boxed{d^2=a^2k^2-b^2}$ wird **Berührbedingung der Hyperbel**[5] genannt. Dieser Zusammenhang wird nun bei Beispielen verwendet, wenn ein Bestimmungsstück von Hyperbel oder Gerade zu errechnen ist und die anderen drei bereits bekannt sind.

1 Die Hyperbelgleichung beschreibt eine Hyperbel in **1. Hauptlage**!
2 Ein Berührpunkt ist ein Punkt, den zwei Kurven gemeinsam haben und in beiden Kurven dieselbe Steigung besteht!
3 Abgeleitet aus dem lat. *discriminare*, das unterscheiden bedeutet.
4 a und b sind ja durch Definition der Hyperbel größer als Null, also ist die Division erlaubt.
5 Nur für die **1. Hauptlage** geeignet.