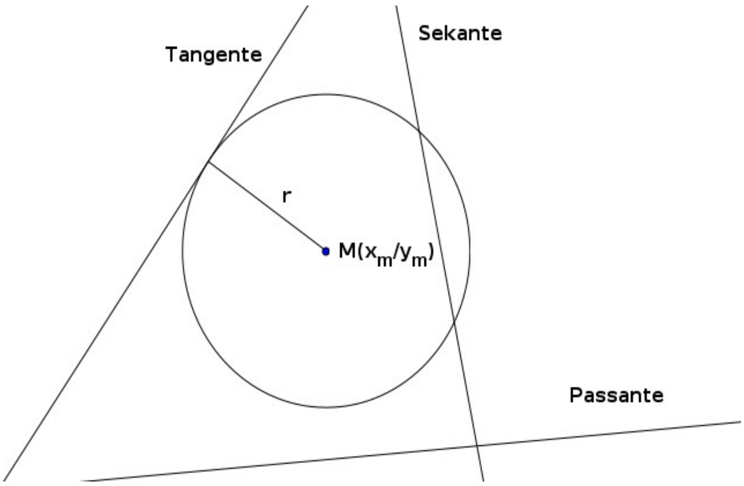
Ziel dieser Herleitung ist es, die Bestimmungsstücke eines Kreises **k** $[M(x_m/y_m),r]$ mit denen einer Geraden **g** (k,d) in Verbindung zu bringen, um die Tangentenberechnung zu erleichtern (siehe auch nebenstehende Skizze zur Wiederholung der Möglichkeiten der Lagebeziehung zwischen Kreis und Gerade). Gegeben sind die allgemeine Kreisgleichung **k** und die allgemeine Geradengleichung **g** in Hauptform (um die Steigung k und den Achsenabschnitt d ablesen zu können).



Kreisgleichung k: $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$, Geradengleichung g: $y=k\cdot x+d$
Nun wird die Geradengleichung in die Kreisgleichung eingesetzt (Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten nach der Einsetzmethode).

$$\begin{aligned}
(x-x_m)^2+(k\cdot x+d-y_m)^2 &= r^2\\
x^2-2\cdot x\cdot x_m+x_m^2+k^2\cdot x^2+2\cdot k\cdot x\cdot(d-y_m)+(d-y_m)^2 &= r^2\\
x^2-2\cdot x\cdot x_m+x_m^2+k^2\cdot x^2+2\cdot k\cdot dx-2\cdot k\cdot x\cdot y_m+d^2-2\cdot d\,y_m+y_m^2 &= r^2\\
\underbrace{(1+k^2)}_{A}\cdot x^2+\underbrace{(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot ky_m)}_{B}\cdot x+\underbrace{x_m^2+d^2-2\cdot dy_m+y_m^2-r^2}_{C} &= 0
\end{aligned}$$

Um nun die Lösung, sprich jene Punkte die der Kreis **k** und die Gerade **g** gemeinsam haben, zu bestimmen, kann die obige quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel aufgelöst werden.

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{(-B)^2-4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}=$$

$$=\frac{-(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot k\cdot y_m)\pm\sqrt{\underbrace{(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot k\cdot y_m)^2-4\cdot(1+k^2)\cdot(x_m^2+d^2-2\cdot dy_m+y_m^2-r^2)}_{\text{Diskriminante } D}}}{2\cdot(1+k^2)}$$

Soll es nur eine Lösung, also einen einzigen Berührpunkt[1] geben, muss die **Diskriminante[2] *D* gleich Null** sein!

$$\begin{aligned}
D &= 0\\
(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot k\cdot y_m)^2-4\cdot(1+k^2)\cdot(x_m^2+d^2-2\cdot d\cdot y_m+y_m^2-r^2) &= 0\\
(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot k\cdot y_m)\cdot(2\cdot d\cdot k-2\cdot x_m-2\cdot k\cdot y_m)-(4+4\cdot k^2)\cdot(x_m^2+d^2-2\cdot dy_m+y_m^2-r^2) &= 0\\
4\cdot k^2\cdot d^2-4\cdot d\cdot k\cdot x_m-4\cdot d\cdot k^2\cdot y_m-4\cdot d\cdot k\cdot x_m+4\cdot x_m^2+4\cdot d\cdot k^2\,y_m+4\cdot k\cdot x_m\cdot y_m+4\cdot k^2\cdot y_m^2 &-\\
+(4\cdot x_m^2+4\cdot d^2-8\cdot dy_m+4\cdot y_m^2-4\cdot r^2+4\cdot k^2\cdot x_m^2+4\cdot d^2\cdot k^2-8\cdot d\cdot k^2\cdot y_m+4\cdot k^2\,y_m^2-4\cdot k^2\cdot r^2) &= 0
\end{aligned}$$

1 Ein Berührpunkt ist ein Punkt, den zwei Kurven gemeinsam haben und in beiden Kurven dieselbe Steigung besteht!
2 Abgeleitet aus dem lat. *discriminare*, das unterscheiden bedeutet.

Division durch 4 liefert:

$$\begin{aligned}
k^2\cdot d^2-d\cdot k\cdot x_m-d\cdot k^2\cdot y_m-d\cdot k\cdot x_m+x_m^2+d\cdot k^2\cdot y_m+k\cdot x_m\cdot y_m+k^2\cdot y_m^2 & \quad - \\
+(x_m^2+d^2-2\cdot dy_m+y_m^2-r^2+k^2\cdot x_m^2+d^2\cdot k^2-2\cdot d\cdot k^2 y_m+k^2\cdot y_m^2-k^2\cdot r^2) & = 0 \\
-2\cdot d\cdot k\cdot x_m+2\cdot kx_m\cdot y_m-d^2+2\cdot dy_m-y_m^2+r^2-k^2\cdot x_m^2+k^2\cdot r^2 & = 0 \\
-2\cdot d\cdot k\cdot x_m+2\cdot kx_m\cdot y_m-d^2+2\cdot dy_m-y_m^2-k^2\cdot x_m^2 & = -r^2-k^2\cdot r^2
\end{aligned}$$

Multiplikation mit -1 führt zu:

$$\begin{aligned}
2\cdot d\cdot k\cdot x_m-2\cdot k\cdot x_m y_m+d^2-2\cdot dy_m+y_m^2+k^2\cdot x_m^2 & = r^2+k^2\cdot r^2 \\
k^2\cdot x_m^2-2\cdot k\cdot x_m\cdot y_m+2\cdot d\cdot k\cdot x_m+y_m^2-2\cdot dy_m+d^2 & = r^2\cdot(1+k^2)
\end{aligned}$$

Wendet man nun die Binomische Formel für die letzten drei Terme in *umgekehrter* Richtung an, ergibt sich:

$$k^2\cdot x_m^2-2\cdot k\cdot x_m\cdot(y_m-d)+(y_m-d)^2 = r^2\cdot(1+k^2)$$

Ein weiteres Mal die Anwendung der Binomischen Formel in die *Retourrichtung*.

$$\begin{aligned}
[k\cdot x_m-(y_m-d)]^2 & = r^2\cdot(1+k^2) \\
(k\cdot x_m-y_m+d)^2 & = r^2\cdot(1+k^2)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Herleitung

$$\boxed{(k\cdot x_m-y_m+d)^2=r^2\cdot(1+k^2)}$$

wird **Berührbedingung des Kreises** genannt. Dieser Zusammenhang wird nun bei Beispielen verwendet, wenn ein Bestimmungsstück von Kreis oder Gerade zu errechnen ist und die anderen zwei bereits bekannt sind.
Sollte der Kreis den Mittelpunkt im Ursprung besitzen, vereinfacht sich die Berührbedingung zu

$$\boxed{d^2=r^2\cdot(1+k^2)}.$$