Um einen Ausdruck integrieren zu können, bedarf es ein wenig Scharfblick, um die richtige Methode wählen zu können. Diese werden (in der Schule) grob in die vier unten beschriebenen Methoden unterteilt. Bevor man nun drauf los rechnet, sollte der Ausdruck eingehend studiert werden, um den einfachsten und schnellsten Lösungsweg herauszufinden.

Es ist empfehlenswert, Brüche und Wurzelausdrücke auf entsprechende Hochzahlen umzuschreiben, damit die Regel zu Integration von Potenzen angewendet werden können: $\sqrt[5]{(x-3)^2}=(x-3)^{2/5}$ oder $\frac{3}{x^4}=3\cdot x^{-4}$

1 elementare Integration mit Vereinfachung

Oft kann ein Ausdruck mittels bekannter Methoden (binomische Formeln, Herausheben, Kürzen, …) so vereinfacht werden, dass dieser dann elementar[1] integriert werden kann.

Hier ist es möglich den Term auszuquadrieren, um dann integrieren zu können:

$$\int (4x-2)^2\,\mathrm{d}x=\int 16x^2-16x+4\,\mathrm{d}x=16\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3-16\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+4\cdot x+C=\frac{16}{3}x^3-8x^2+4x+C$$

Bei diesem Beispiel kann der gemeinsame Nenner aufgelöst und nach dem Kürzen integriert werden.

$$\int \frac{3x^2-2x+4}{x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{3\cdot x^2}{x}-\frac{2\cdot x}{x}+\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x=\int 3x-2+\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2-2\cdot x+4\cdot\ln x+C=$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2x+4\cdot\ln x+C$$

Der Zähler kann hier mittels binomischer Formel zerlegt werden, dann wird gekürzt und elementar integriert. Besonders bei Brüchen ist diese Variante zu überprüfen, da sonst die aufwändige Methode der Partialbruchzerlegung (siehe Punkt 4) angewendet werden muss.

$$\int \frac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int x+2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot x^2+2x+C$$

Manchmal kann auch eine Polynomdivision zu einem einfacheren Ausdruck führen, der sich problemlos integrieren lässt. Voraussetzung ist, dass die Division restlos durchführt werden kann.

$$\int \frac{3x^3-5x^2+2x}{x^2-x}\,\mathrm{d}x=\int 3x-2\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot x+C=\frac{3}{2}\cdot x^2+2x+C$$

Es ist auch möglich, dass Vereinfachen mittels Potenz-/Logarithmusrechenregeln zu einem integrablen Ausdruck führen:

$$\int \ln\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int \ln x^{1/2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\int \ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\ln x-x)+C$$

1 Das heißt ohne Anwendung von speziellen Regeln.

oder

$$\int e^{x+2}\,\mathrm{d}x=\int e^{x}\cdot e^{2}\,\mathrm{d}x=e^{2}\cdot\int e^{x}\,\mathrm{d}x=e^{2}\cdot e^{x}+C\approx 7{,}39\cdot e^{x}+C$$

2 Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode wird bei Ausdrücken verwendet, die sich nicht mehr elementar integrieren lassen, aber eine besondere Eigenschaft aufweisen: Der Ausdruck besteht aus **zwei Termen**, bei denen einer (bis auf eine multiplikative Konstante) die **Ableitung** des anderen ist.

$$\int x\cdot(3x^{2}-1)^{7}\,\mathrm{d}x=\int x\cdot u^{7}\frac{\mathrm{d}u}{6x}=\frac{1}{6}\cdot\int u^{7}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot u^{8}+C=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot(3x^{2}-1)^{8}+C=\frac{1}{48}\cdot(3x^{2}-1)^{8}+C$$

$$u=3x^{2}-1$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=6x\rightarrow\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{6x}$$

Die Substitutionsmethode funktioniert bei Bruchtermen nur dann, wenn der Ausdruck in der abgeleiteten Form im Zähler steht.

$$\int\frac{2x-5}{\sqrt[3]{2x^{2}-10x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x-5}{u^{1/3}}\frac{\mathrm{d}u}{4x-10}=\int\frac{2x-5}{u^{1/3}}\frac{\mathrm{d}u}{2\cdot(2x-5)}=\int\frac{1}{u^{1/3}}\frac{\mathrm{d}u}{2}=\frac{1}{2}\cdot\int u^{-1/3}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot u^{2/3}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot(2x^{2}-10x)^{2/3}+C$$

$$u=2x^{2}-10x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=4x-10\rightarrow\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{4x-10}$$

3 partielle Integration

Die Formel der partiellen Integration wird aus der Produktregel für die Ableitung hergeleitet und lautet:

$$\int f\cdot g\,\mathrm{d}x=F\cdot g-\int F\cdot g'\,\mathrm{d}x$$

Diese Art von Integration wird verwendet, wenn der Ausdruck aus zwei Termen, die durch eine Multiplikation verbunden sind, besteht und die Substitutionsmethode nicht anwendbar ist.

Hier genügt eine einmalige partielle Integration, um zum Ergebnis zu gelangen:

$$\int x\cdot e^{x}\,\mathrm{d}x=e^{x}\cdot x-\int e^{x}\cdot 1\,\mathrm{d}x=e^{x}\cdot x-e^{x}+C=e^{x}\cdot(x-1)+C$$

$$f=e^{x}\rightarrow F=e^{x}$$

$$g=x\rightarrow g'=1$$

Ein Problem stellt die *richtige* Wahl einer Funktion als f und g dar. Als Faustregel dient Folgendes: Kommt bei der zu integrierenden Funktion ein Term mit einer Potenz von x vor, ist dieser als g zu wählen. Ist allerdings ein Logarithmus vorgegeben, ist dieser immer als g zu definieren.

Oft kann es vorkommen, dass man mehr als ein Mal partiell integrieren muss:

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x^2 - \underbrace{2 \cdot \int e^x \cdot x \,\mathrm{d}x}_{\text{2. partielle Integration}}$$

$$f = e^x \rightarrow F = e^x$$
$$g = x^2 \rightarrow g' = 2x$$

$$\rightarrow \int e^x \cdot x \,\mathrm{d}x = \int x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x - e^x + C = \underbrace{e^x \cdot (x-1) + C_1}_{\text{oben einsetzen}}$$

$$f = e^x \rightarrow F = e^x$$
$$g = x \rightarrow g' = 1$$

$$\rightarrow \int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \,\mathrm{d}x = e^x \cdot x^2 - 2 \cdot (e^x \cdot (x-1) + C_1) = e^x \cdot x^2 - 2 \cdot e^x \cdot x + 2 \cdot e^x \underbrace{-2 \cdot C_1 + C_2}_{K} =$$

$$= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + K$$

Bei der partiellen Integration kann es auch zu so genannten Rekursionen kommen. Hier kann das Integral wie eine Gleichung gelöst werden.

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \quad / + \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$f = \cos x \rightarrow F = \sin x$$
$$g = \sin x \rightarrow g' = \cos x$$

$$\rightarrow 2 \cdot \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \sin x \quad / : 2$$
$$\rightarrow \int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

4 Partialbruchzerlegung

a Die Partialbruchzerlegung ist ein aufwändiges und einigermaßen kompliziertes Verfahren, das bei Brüchen angewendet wird, wenn keine der oben erwähnten Methoden zum Ziel führt.

Sollte der Grad des Zählerpolynoms größer gleich dem Grad des Nennerpolynoms sein,

$$\int \frac{2x^3 + 5x - 3}{x^3 - 7x - 6} \,\mathrm{d}x =$$

wird eine Polynomdivision durchgeführt, um den Ausdruck zu Vereinfachen. Ist der Grad den Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms entfällt dieser Schritt.

$$(2x^3 + 5x - 3) : (x^3 - 7x - 6) = 2 + \frac{19x + 9}{x^3 - 7x - 6}$$

So muss nur mehr der Rest zerlegt werden. Zuerst wird das Nennerpolynom mit bekannten Verfahren in Linearfaktoren zerlegt und in einzelne (Partial)Brüche (daher der Name der Methode) umgewandelt.

$$\frac{19x+9}{x^3-7x-6}=\frac{19x+9}{(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

Dann wird mit dem Nenner so multipliziert, dass die Brüche wegfallen,

$$19x+9=A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B\cdot(x-3)\cdot(x+2)+C\cdot(x-3)\cdot(x+1)$$

und dann die Nullstellen des Nennerpolynoms für die Unbekannte eingesetzt. So lassen sich die Koeffizienten *A*, *B* und *C* bestimmen.

$$x=3:\ \ 19\cdot 3+9=A\cdot(3+1)\cdot(3+2)+B\cdot(3-3)\cdot(3+2)+C\cdot(3-3)\cdot(x+1)$$
$$\rightarrow 66=20\cdot A\rightarrow A=\frac{33}{10}$$

$$x=-1:\ \ 19\cdot(-1)+9=A\cdot(-1+1)\cdot(-1+2)+B\cdot(-1-3)\cdot(-1+2)+C\cdot(-1-3)\cdot(-1+1)$$
$$\rightarrow -10=-4\cdot B\rightarrow B=\frac{5}{2}$$

$$x=-2:\ \ 19\cdot(-2)+9=A\cdot(-2+1)\cdot(-2+2)+B\cdot(-2-3)\cdot(-2+2)+C(-2-3)\cdot(-2+1)$$
$$\rightarrow -29=5\cdot C\rightarrow C=-\frac{29}{5}$$

Diese Koeffizienten werden eingesetzt und nun integriert. Aufzupassen ist, dass das Divisionsergebnis von oben (die 2) nicht vergessen wird. Das Integral eines jeden Linearfaktors des Nenners entspricht dem eines natürlichen Logarithmus'. Einfach vor die Klammer ein ln schreiben.

$$\rightarrow\int\frac{2x^3+5x-3}{x^3-7x-6}\,\mathrm{d}x=\int 2+\frac{33}{10\cdot(x-3)}+\frac{5}{2\cdot(x+1)}-\frac{29}{5\cdot(x+2)}\,\mathrm{d}x=$$
$$=2x+\frac{33}{10}\cdot\ln(x-3)+\frac{5}{2}\cdot\ln(x+1)-\frac{29}{5}\cdot\ln(x+2)+C=2x+\ln\frac{(x-3)^{33/10}\cdot(x+1)^{5/2}}{(x+2)^{29/5}}+C$$

b Kommt es zu doppelten Nullstellen des Nennerpolynoms muss eine leicht abgeänderte Vorgehensweise gewählt werden.

$$\int\frac{2x}{x^3-3x^2+4}\,\mathrm{d}x=$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms werden wie oben bestimmt. Da aber zwei Nullstellen ident sind, wird derselbe Linearfaktor ein Mal linear und ein Mal quadratisch in die Nenner der Partialbrüche geschrieben.

$$\frac{2x}{x^3-3x^2+4}=\frac{2x}{(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+1)}$$

Dann wird wieder mit dem Nenner so multipliziert, dass die Brüche wegfallen:

$$2x = A\cdot(x-2)\cdot(x+1)+B\cdot(x+1)+C\cdot(x-2)^2$$

Da nun zwei Nullstellen gleich sind, können nur zwei Werte eingesetzt werden. Die dritte Unbekannte kann man nun ermitteln, indem man einen beliebigen Wert einsetzt und das entstehende Gleichungssystem löst,

$$x=-1:\ 2\cdot(-1)=A\cdot(-1-2)\cdot(-1+1)+B\cdot(-1+1)+C\cdot(-1-2)^2$$
$$\rightarrow -2=9\cdot C\rightarrow C=-\frac{2}{9}$$

$$x=2:\ 2\cdot 2=A\cdot(2-2)\cdot(2+1)+B\cdot(2+1)+C\cdot(2-2)^2$$
$$\rightarrow 4=3\cdot B\rightarrow B=\frac{4}{3}$$

$$x=0:\ 0=A\cdot(0-2)\cdot(0+1)+B\cdot(0+1)+C(0-2)^2$$
$$\rightarrow 0=-2\cdot A+B+4\cdot C$$
$$0=-2\cdot A+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}\quad /\cdot 9$$
$$0=-18\cdot A+12-8$$
$$0=-18\cdot A+4$$
$$\rightarrow 4=18\cdot A\rightarrow A=\frac{2}{9}$$

das Verfahren des Koeffizientenvergleichs anwendet:

$$2x=A\cdot(x-2)\cdot(x+1)+B\cdot(x+1)+C\cdot(x-2)^2$$
$$2x=A\cdot(x^2-x-2)+B\cdot(x-1)+C\cdot(x^2-4x+4)$$
$$2x=(A+C)\cdot x^2+(-A+B-4C)\cdot x+(-2A+B+4C)$$
$$\rightarrow \text{I: } A+C=0, \text{II: } -A+B-4C=2, \text{III: } -2A+B+4C=0$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert dieselben Werte wie oben.

Nun wird wiederum integriert.

$$\rightarrow \int \frac{2x}{x^3-3x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{9\cdot(x-2)}+\frac{4}{3\cdot(x-2)^2}-\frac{2}{9\cdot(x+1)}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\ln(x-2)+\frac{4}{3}\cdot(-1)\cdot(x-2)^{-1}-\frac{2}{9}\cdot\ln(x+1)+C=$$
$$=\frac{2}{9}\cdot\ln(x-2)-\frac{4}{3\cdot(x-2)}-\frac{2}{9}\cdot\ln(x+1)+C=-\frac{4}{3\cdot(x-2)}+\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2/9}+C$$

c Es kann allerdings auch vorkommen, dass Nennerpolynome komplexe Nullstellen besitzen. Dann ist konsequenterweise die komplexe Partialbruchzerlegung anzuwenden. Angegebenes Nennerpolynom besitzt die drei Nullstellen $1, \pm i$. Die komplexen Nullstellen werden zu (x^2+1) zusammen gefasst.

$$\int \frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{A\cdot x+B}{(x^2+1)}+\frac{C}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

Im Zähler jedes Bruches mit komplexen Nullstellen wird die lineare Beziehung $A\cdot x+B$ geschrieben.

Multiplikation mit dem Nennerpolynom führt also zu:

$$3x+1=(A\cdot x+B)\cdot(x-1)+C\cdot(x^2+1)$$

Bei der Bestimmung der Unbekannten A, B und C wird nun die reelle Nullstelle, sowie zwei beliebige anderen Werte für x in die folgende Gleichung eingesetzt. Das dann auftretende Gleichungssystem kann dann mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren gelöst werden.

$x=1:\ \ 3\cdot 1+1=(A\cdot 1+B)\cdot(1-1)+C\cdot(1^2+1)$
$\rightarrow 4=2\cdot C\rightarrow C=2$

$x=2:\ \ 3\cdot 2+1=(A\cdot 2+B)\cdot(2-1)+C\cdot(2^2+1)$
$7=(2\cdot A+B)+2\cdot 5$
$\rightarrow I:-3=2\cdot A+B$

$x=-1:\ \ 3\cdot(-1)+1=(A\cdot(-1)+B)\cdot(-1-1)+C\cdot((-1)^2+1)$
$-2=(-A+B)\cdot(-2)+2\cdot 2$
$-6=2\cdot A-2\cdot B$
$\rightarrow II:-3=A-B$

$I:-3=2\cdot A+B$
$II:-3=A-B$
$\rightarrow I+II:-6=3\cdot A\rightarrow A=-2$
$\rightarrow I:-3=-2-B\rightarrow B=1$

Diese Bestimmung führt zu

$$\int \frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{-2\cdot x+1}{(x^2+1)}+\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{-2\cdot x}{(x^2+1)}+\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

Der erste Teil des Integrandens lässt sich mit Substitution, der dritte elementar berechnen. Beim zweiten Teil hilft ein Blick in eine Integraltafel (ein Sammlung von oft vorkommenden Integralen inklusive Lösung) und man findet

$$\int \frac{1}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=\arctan x\ .$$

Das Ergebnis der Integration lautet nun:

$$\int \frac{3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=-\ln(x^2+1)+\arctan x+2\cdot\ln(x-1)+C=\arctan x+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+C$$