Allgemeines

- Abkürzungen für Unbekannte und Parameter können von den Schülern beliebig gewählt werden.
- Prozentangaben werden auf zwei Nachkommastellen gerundet.
- Äquivalenzumformungsschritte von Gleichungen müssen nicht angegeben werden.
- Alle Definitionen und Begründungen, sowie Theorieantworten können in Sätzen oder Stichworten gegeben werden.
- Bei Berechnung der Ergebnisse für die Normalverteilung dürfen gerundete Werte verwendet werden. Durch Verwendung unterschiedlicher Normalverteilungstabellen kann es zu leicht abweichenden Ergebnissen kommen.
- Nur bei dem Zusatz **händisch** sind die entsprechenden Rechenschritte gefragt, ansonsten genügt eine Ermittlung der gesuchten Werte mittels des Programmes GeoGebra.
- Je nach verwendeter GeoGebra-Version kann es zu leicht abweichenden Ergebnissen kommen.

09 **1**

04 **a** Ableitungen der Splinefunktion s_2:

$$s_2(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$s_2'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$s_2''(x)=6ax+2b$$

Bestimmung des Funktionswertes, der Steigung und der Krümmung von s_1 an der Stelle $x=-0{,}5$:

$$s_1(-0{,}5)=1{,}5$$
$$s_1'(-0{,}5)=-0{,}5$$
$$s_1''(-0{,}5)=-4$$

Gleichungssystem lautet:

I: $s_2(-2)=2$
II: $s_2(-0{,}5)=1{,}5$
III: $s_2'(-0{,}5)=-0{,}5$
IV: $s_2''(-0{,}5)=-4$

beziehungsweise

I: $-8a+4b-2c+d=2$
II: $-0{,}125a+0{,}25b-0{,}5c+d=1{,}5$
III: $0{,}75a-b+c=-0{,}5$
IV: $-3a+2b=-4$

GeoGebra liefert als Lösung:

CAS

1 `Löse[{-8a+4b-2c+d=2,-0.125a+0.25b-0.5c+d=1.5,0.75a-b+c=-0.5,-3a+2b=-4},{a,b,c,d}]`

$\rightarrow \left\{\left\{a=-\frac{34}{27}, b=-\frac{35}{9}, c=-\frac{31}{9}, d=\frac{16}{27}\right\}\right\}$

$\rightarrow s_2(x)=-\frac{34}{27}\cdot x^3-\frac{35}{9}\cdot x^2-\frac{31}{9}\cdot x+\frac{16}{27}$ Jede äquivalente händisch berechnete Lösung ist korrekt.

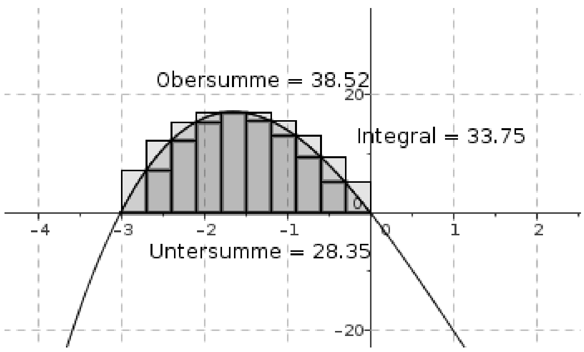
02 **b** $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3+b\cdot x^2+c$

Zur Berechnung des Wendepunktes benötigt man die zweite Ableitung $f''(x)=x+2b$, die Null gesetzt wird: $x+2b=0$, was zur Lösung $x=-2b$ führt, womit die Behauptung als richtig bewiesen wird.

02 **c** $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0} x^3-3x^2-18x\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-x^3-9x^2\Big|_{-3}^{0}=0-\left(\frac{81}{4}+27-81\right)=\frac{135}{4}=33{,}75$

Antwort mit den Fachtermini: *bestimmt*, *Fläche unter der Kurve* bzw. jede korrekte physikalische Interpretation, wie z.B. *Arbeit*, etc.

GeoGebra liefert:



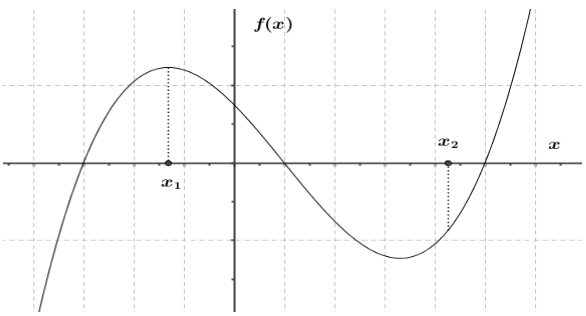
analytisches Integral – Obersumme: $|-4{,}77|$

analytisches Integral – Untersumme: $|5{,}40|$

01 **d**

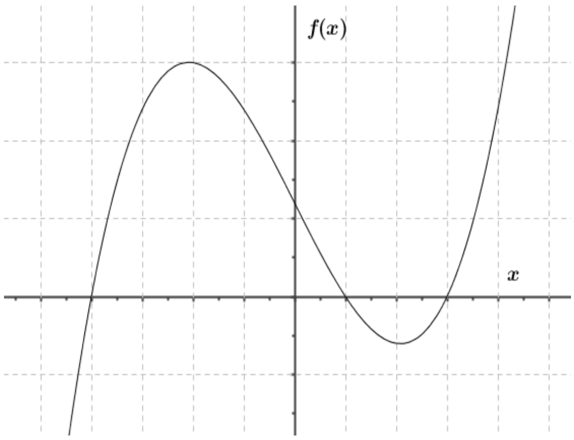
Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion p dritten Grades.		$p(x)$ besitzt maximal 3 Nullstellen	X
		$p(x)$ besitzt zwei Hochpunkte	☐
		$p(x)$ kann zwei Sattelpunkte besitzen	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die Funktion p gelten können.		$p(x)$ besitzt genau einen Wendepunkt	X
		$p(x)$ besitzt eine senkrechte Asymptote	☐

01 **e**

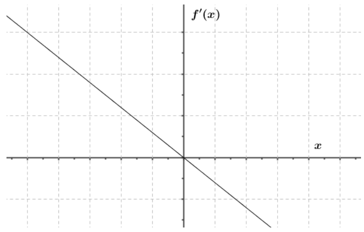
<table>
<tr><td rowspan="2">Gegeben ist unten stehender Graph der Funktion f .

</td><td rowspan="4"></td><td>$f'(x_1) < f'(x_2)$</td></tr>
<tr><td>$f''(x_1) < f''(x_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aufgabenstellung: Ergänzen Sie folgende Aussagen über die erste und zweite Ableitung an den Stellen x_1 und x_2 mit „<“, „>“ , „< 0“ oder „> 0“.</td><td>$f'(x_2) > 0$</td></tr>
<tr><td>$f''(x_1) < 0$</td></tr>
</table>

01 **f**

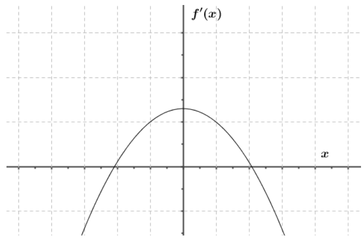
Gegeben ist der Graph der Funktion f .



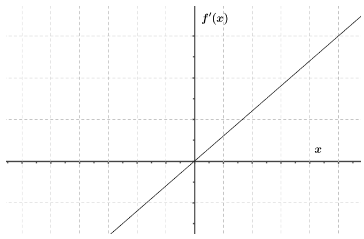
Aufgabenstellung:
Ordnen Sie dem gegebenen Graphen der Funktion f den korrekten Graphen der Ableitungsfunktion f' zu!



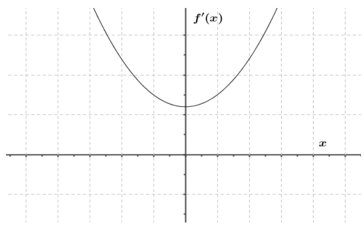
☐



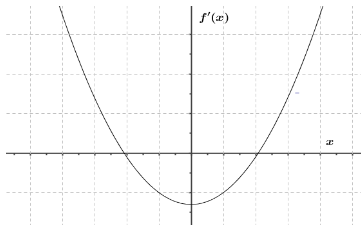
☐



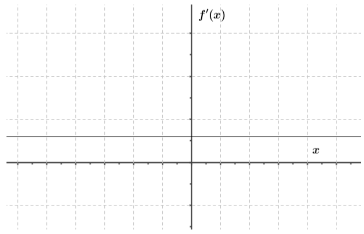
☐



☐



X



☐

11 **2**

05 **a** $13\cdot x^4+170\cdot x^3+26\cdot x^2+170\cdot x+13=0$

$$13x^4+13+170x^3+170x+26x^2=0\ /:x^2\neq 0$$
$$13x^2+\frac{13}{x^2}+170x+\frac{170}{x}+26=0$$
$$13\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+170\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$$
$$13\cdot\left(u^2-2\right)+170u+26=0$$
$$13u^2-26+170u+26=0$$
$$13u^2+170u=0$$
$$u\cdot(13u+170)=0$$
$$u_1=0,\quad u_2=-\frac{170}{13}$$

$$u=x+\frac{1}{x}$$
$$u^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\rightarrow u^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$0=x+\frac{1}{x}\rightarrow x_{1,2}=\pm i$$
$$-\frac{170}{13}=x+\frac{1}{x}\rightarrow x_3=-\frac{1}{13},\quad x_4=-13$$

$$\mathrm{L}=\{\pm i,-13,-\frac{1}{13}\}$$

03 **b** $\sqrt{x+5}+2=\sqrt{6x+1}$

Definitionsmenge: $x+5\geq 0\rightarrow x\geq -5;\quad 6x+1\geq 0\rightarrow x\geq -\frac{1}{6}\rightarrow \mathrm{D}=[-\frac{1}{6},\infty[$

$$\sqrt{x+5}+2=\sqrt{6x+1}\ /^2$$
$$x+5+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot 2+4=6x+1$$
$$4\cdot\sqrt{x+5}=5x-8\ /^2$$
$$16\cdot(x+5)=25x^2-80x+64$$
$$25x^2-96x-16=0$$
$$x_{1,2}=\frac{96\pm\sqrt{9216+1600}}{50}=\frac{96\pm 104}{50}$$
$$x_1=4$$
$$x_2=-\frac{4}{25}$$

Probe: $\sqrt{4+5}+2=\sqrt{6\cdot 4+1}\rightarrow 5=5$ r.A.

$\sqrt{-\frac{4}{25}+5}+2=\sqrt{6\cdot\left(-\frac{4}{25}\right)+1}\rightarrow 4{,}2=0{,}2$ f.A.

$\mathrm{L}=\{4\}$

03 **c** $y' = x \cdot y$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x \cdot y$$
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} = x\,\mathrm{d}\,x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \int x\,\mathrm{d}\,x$$
$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C$$
$$y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^C = K \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Einsetzen Anfangsbedingung: $1 = K \cdot e^{\frac{0}{2}} \rightarrow 1 = K \cdot e^0 \rightarrow K = 1$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Antwort mit den Fachtermini: *unendlich*, *Funktion* oder *Funktionenschar*, *Zahl*, *Integration(skonstante)*

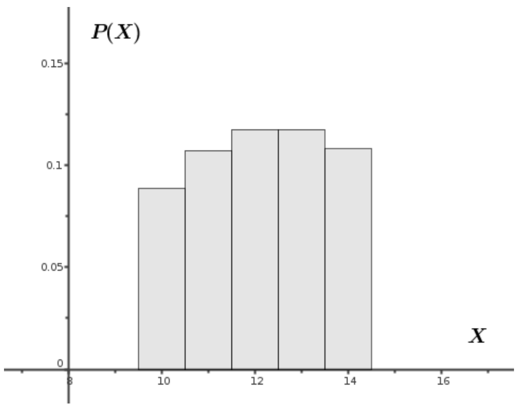
09 **3**

03 **a** $n = 100$, $p = 0{,}1287$, $q = (1-p) = 1 - 0{,}1287 = 0{,}8713$

Als Beispiel für $k = 10$, alle anderen Werte über GeoGebra:

$$\mathrm{P}(X=10) = \binom{100}{10} \cdot 0{,}1287^{10} \cdot 0{,}8713^{100-10} = 0{,}088957909 \mathrel{\hat{=}} 8{,}90\,\%$$

k	P(X = k)
8	0.0438304761
9	0.0661808497
10	0.0889579086
11	0.1075090987
12	0.1177781734
13	0.1177646559
14	0.1080978403
15	0.0915450871
16	0.0718364427
17	0.0524307434
18	0.0357110349
19	0.0227653075
20	0.0136188167
21	0.0076633895



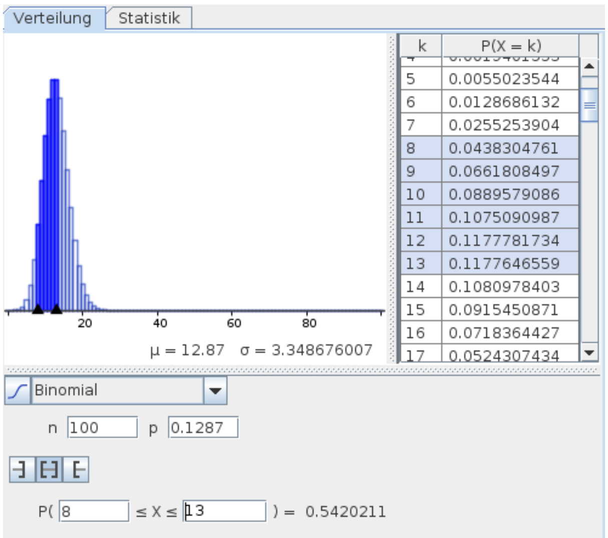
Jede äquivalente händisch berechnete Lösung ist korrekt.

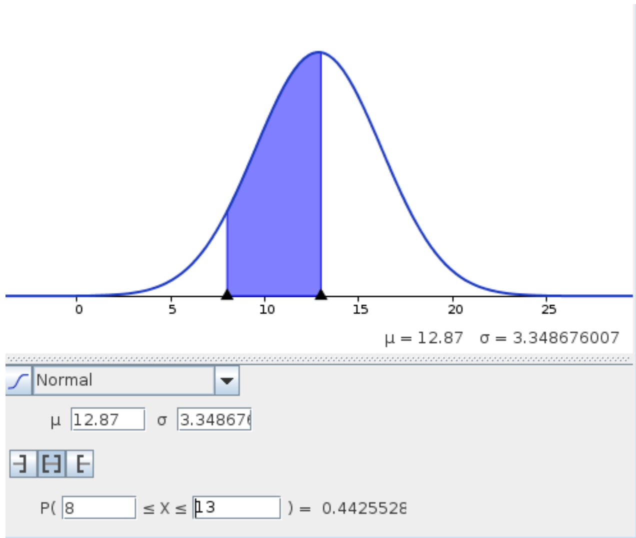
03 **b**

$$1-(1-p)^n > w$$
$$1-(1-0{,}1287)^n > 0{,}999$$
$$1-0{,}8713^n > 0{,}999$$
$$-0{,}8713^n > -0{,}001$$
$$0{,}8713^n < 0{,}001$$
$$\ln 0{,}8713^n < \ln 0{,}001$$
$$n \cdot \ln 0{,}8713 < \ln 0{,}001$$
$$n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}8713} \sim 50{,}140\ldots \rightarrow 51$$

Es müssen mindestens 51 Ansetzungen abgewartet werden.

03 **c** Da $\sigma = 3{,}348\ldots > 3$ gilt, darf die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden.





Jede äquivalente händisch berechnete Lösung ist korrekt.

$$P(8 \leqslant X \leqslant 13) = P\left(\frac{8-\mu-0{,}5}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{13-\mu+0{,}5}{\sigma}\right) = P(-1{,}60 \leqslant Z \leqslant 0{,}19) = \Phi(-1{,}60) - \Phi(0{,}19) =$$
$$= 0{,}5753 - 0{,}0548 = 0{,}05205 \mathrel{\hat{=}} 52{,}05\,\%$$

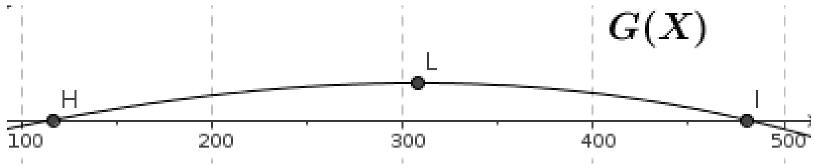
08 **4**

01 **a** GeoGebra liefert mit dem Befehl `TrendPoly[]` folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = 0.000052381\,x^3 + 0.0435714285\,x^2 + 58.2619048027\,x + 4185.7142959928$$

01 **b** $K(0)=4185{,}71$ GE, Antwort mit den Fachtermini: *Fixkosten*, *Miete*, *Löhne*, etc.

02 **c** $G(x)=E(X)-K(X)$



H = (116.4121331938, 0)
I = (480.46215757, 0)

$I=[117;480]$

02 **d** Betriebsmaximum $G'(X)=0$ L = (307.9505000748, 3005.7867209608)

Betriebsmaximum bei 308 ME mit einem Gewinn von 3005,79 GE.

01 **e** Grenzkosten $K'(400)=$

c = 118.2619047602

produzierte Stück	Grenzkosten
400	118,26 GE

01 **f**

Gegeben ist eine Gewinnfunktion $G(x)$, eine Kostenfunktion $K(x)$ und eine Erlösfunktion $E(x)$.		$K''(x)=0$	X
		$K'(x)=E(x)$	☐
		$K(x)=0$	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jenen Ausdruck an, der angibt, ab wann sich der Anstieg der möglichen Kosten $K(x)$ zu verlangsamen beginnt.		$G'(x)=K'(x)$	☐
		$K'(x)=0$	☐
		$K'(x)=E'(x)$	☐

08 **5**

03 **a** k: $x^2+y^2-10x-4y=-11$

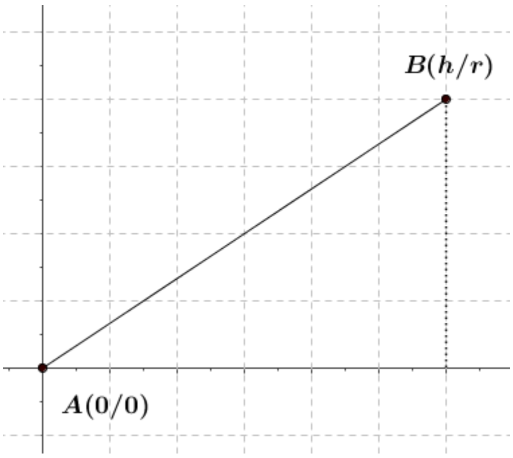
GeoGebra liefert:

Kegelschnitt
c: (x - 5)² + (y - 2)² = 18 was $M(5/2)$ und $r=\sqrt{18}$ entspricht.

Jede äquivalente händisch berechnete Lösung ist korrekt.

$$
\begin{aligned}
\text{k}': 2\cdot x+2\cdot y\cdot y'-10-4\cdot y'&=0\\
2\cdot y\cdot y'-4\cdot y'&=-2\cdot x+10\\
y\cdot y'-2\cdot y'&=-x+5\\
y'\cdot(y-2)&=-x+5\\
y'&=\frac{-x+5}{y-2}\\
y'_P&=\frac{-8+5}{-1-2}=\frac{-3}{-3}=1
\end{aligned}
$$

03 **b**



oder Ähnliches

$$
\begin{aligned}
y&=k\cdot x+d\\
0&=k\cdot 0+d \rightarrow d=0\\
r&=k\cdot h \rightarrow k=\frac{r}{h}\\
y&=\frac{r}{h}\cdot x
\end{aligned}
$$

$$V=\pi\cdot\int_0^h\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2\mathrm{d}\,x=\pi\cdot\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}\,x=\pi\cdot\left(\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h=$$

$$=\pi\cdot\left[\left(\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}\right)-\left(\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{0^3}{3}\right)\right]=\frac{\pi\cdot r^2\cdot h^3}{h^2\cdot 3}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}$$

Antwort mit den Fachtermini: *Integration*, *Grad 2*, *Grad 3*

01 **c**

Gegeben sind folgende Vektoren sind gegeben: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$		$\vec{c}$ ist das Vielfache eines der anderen Vektoren	□
		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal	□
		$\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$	**X**
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die gegeben Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ korrekt sind!		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel	□
		$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal	**X**

01 **d** Gegeben sind vier Kegelschnittgleichungen!
Aufgabenstellung: Ordnen Sie diesen Gleichungen die Bezeichnungen der entsprechenden Kegelschnitte zu.

$3x^2-3y^2=16$	**C**		**A**	Kreis
$3x^2+16y^2=3$	**B**		**B**	Ellipse
$3x^2+3y^2=16$	**A**		**C**	Hyperbel
$3x^2=16y$	**D**		**D**	Parabel

Es werden folgende Korrekturzeichen verwendet:

A (Ausdrucksfehler, Theorieteil)

AF (Angabe- oder Abschreibefehler)

Auslassung bzw. Teile fehlen

DF (Denkfehler)

FF (Folgefehler)

korrekt gelöst

nach Folgefehler korrekt gelöst

nicht nachvollziehbarer Rechenschritt

RF (Rechenfehler)

Rechtschreibfehler bei Fachausdruck

siehe dort (selbe Markierung)

VZ (Vorzeichenfehler)