Portfolio zum Ringkonversatorium

ZK Mentoring 2015/16
Fachdidaktikmodul Mathematik

Stefan Götz, Christoph Ableitinger, Christian Dorner, Franz Embacher, Hans Humenberger, Andreas Ulovec

Studienjahr 2015/16
Institut für Mathematik
Universität Wien

vorgelegt von

Matthias Kittel
9502020
BRG Kremszeile
km@matkit.at

Krems, am 10 05 16
modifiziert am 12 05 16

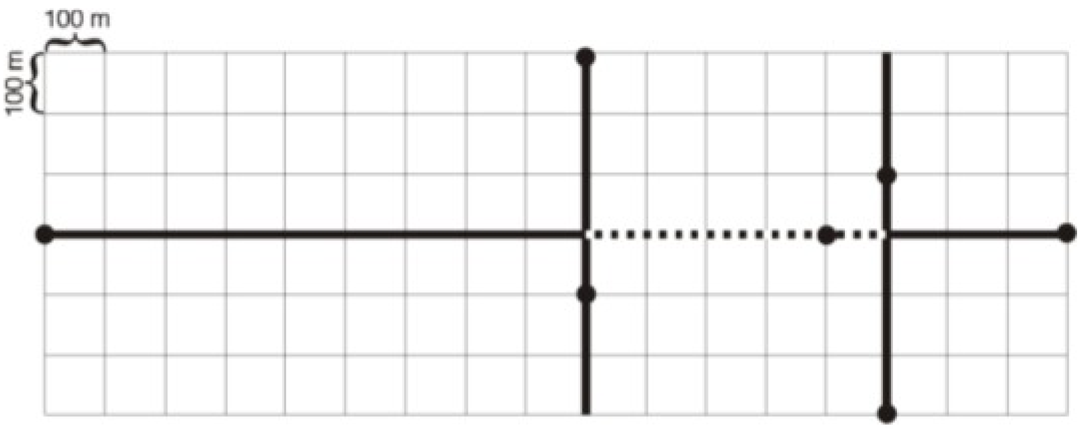
Inhaltsverzeichnis

1 Lösung des *Altenheim-Problems* – Christian Dorner, Computereinsatz im Mathematikunterricht

1.1 Aufgabe

Die Angabe zum *Altenheim-Problem* (siehe Abbildung 1, entnommen aus [3]) ist sehr allgemein gefasst und es gibt daher keine eindeutige, beziehungsweise mehrere sinnvolle Lösungen.

> In einem Waldstück wurde eine Altenwohnanlage eingerichtet. Die sieben Wohnhäuser sind in der unten stehenden Abbildung durch schwarze Punkte gekennzeichnet. Im Wald gibt es Wege, damit die alten Leute nicht durch das Unterholz gehen müssen. Die Wege sind fett eingezeichnet. Auf dem Wegstück zwischen den beiden Kreuzungen (gestrichelt gekennzeichnet) soll ein Gemeinschaftshaus gebaut werden. Dieses soll dem Nachmittagskaffee und abendlichen Geselligkeiten dienen. Die Frage ist, wo genau auf diesem Wegstück das Gebäude errichtet werden soll.



(Busse, 2009, S. 46)

Abbildung 1: Angabe zum *Altenheim-Problem*

Für diese hier vorgestellte Aufgabe sind vier sinnvolle Lösungsvorschläge angegeben worden. Darüber hinaus sind sicherlich weitere Lösungsmöglichkeiten auffindbar, da die Besonderheit dieser Aufgabe eben in ihrer offenen Fragestellung liegt.

Die Lösungsvorschläge sind wie folgt:

1. **Die Summe der Abstände zum Gemeinschaftshaus ist minimal.** Hier hat der/die *durchschnittliche* Bewohner/in eines Hauses den kürzesten Weg.
2. **Die Summe der Quadrate aller Abstände der Wohnhäuser zum Gemeinschaftshaus ist minimal.** Hier handelt es sich wieder um einen Durchschnittswert für den zurückgelegten Weg, allerdings sind hier die weiter entfernt liegenden Wohnhäuser durch die Quadratbildung stärker gewichtet, es wird auf Bewohner und Bewohnerinnen weit entfernt liegender Häuser mehr eingegangen.
3. **Der maximale Abstand eines Wohnhauses zum Gemeinschaftshaus ist minimal.** Das bedeutet, dass hier besonders auf die Bewohnerinnen und Bewohner des am weitest entfernt liegenden Wohnhauses Rücksicht genommen wird, damit deren Weg für diese der am

kürzest mögliche ist.

4. **Der minimale Abstand eines Wohnhauses zum Gemeinschaftshaus ist aus Lärmschutzgründen maximal.** Im Gegensatz zu den anderen hier vorgestellten Lösungsmöglichkeiten geht es hier um dem Abstand per Luftlinie, da sich Schall nicht entlang von Wegen ausbreitet, sondern den kürzesten direkten Weg nimmt. Hier werden jene Wohnhäuser bevorzugt, die nahe am möglichen Bauplatz des Gemeinschaftshauses liegen, um vielleicht eine Auslastung desselben zu erhöhen, wenn es für Bewohner/innen nahe liegender Wohnhäuser einfach ist, das Gemeinschaftshaus zu erreichen. All zu nahe sollte das neue Haus dennoch nicht liegen, um einen ruhigen Schlaf für die Bewohnerinnen und Bewohner der anderen Häuser zu garantieren.

1.2 Definitionen

Zur Ermittlung der Lösung bin ich wie folgt vorgegangen. Die Wohnhäuser werden durch die Punkte H_1 bis H_7 beschrieben. Das Gemeinschaftshaus G (symbolisiert durch die rote Raute) soll auf der gestrichelten Linie zwischen den Punkten A und B errichtet werden. Um die Strecken zwischen den Wohnhäusern und dem Gemeinschaftshaus nun beschreiben zu können, wird der Parameter t eingeführt, der sich im Intervall $[0;5]$ bewegt und die Länge des Abstandes zwischen den Punkten A und B beschreibt, wobei der Parameter im Punkt A den Wert 0 und im Punkt B den Wert 5 annimmt (siehe Abbildung 2).

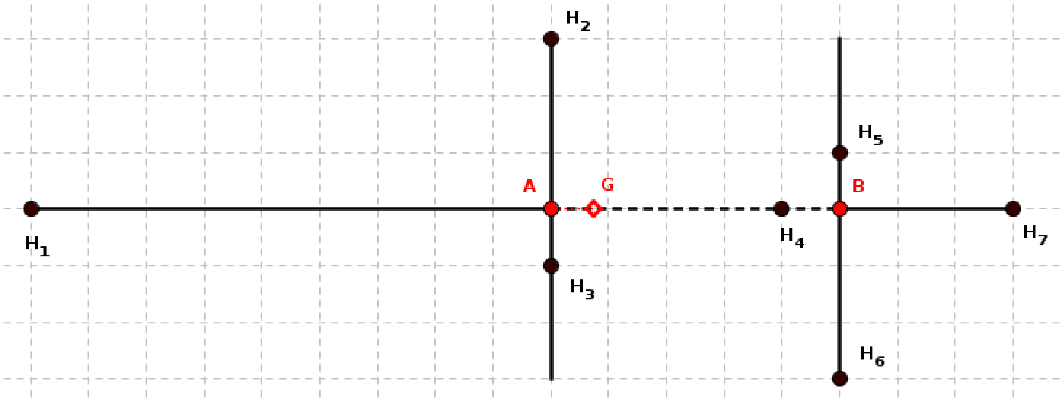


Abbildung 2: graphische Darstellung des Ansatzes zur Lösung

Das führt nun für die Länge der Strecken zwischen den Punkten H_1 bis H_7 und G zu folgenden parameterabhängigen Darstellungen.

$\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{G}}=9+t$
$\overline{\mathrm{H}_2\mathrm{G}}=3+t$
$\overline{\mathrm{H}_3\mathrm{G}}=1+t$
$\overline{\mathrm{H}_4\mathrm{G}}=|4-t|$
$\overline{\mathrm{H}_5\mathrm{G}}=1+(5-t)=6-t$
$\overline{\mathrm{H}_6\mathrm{G}}=\overline{\mathrm{H}_7\mathrm{G}}=3+(5-t)=8-t$

Das führt zu einer Gesamtweglänge von $W=\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_2\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_3\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_4\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_5\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_6\mathrm{G}}+\overline{\mathrm{H}_7\mathrm{G}}$. Setzt man nun obige Werte ein und definiert die Gesamtweglänge als Funktion in Abhängigkeit von oben eingeführten Parameter t ergibt das den Funktionsterm $W(t)=9+t+3+t+1+t+|4-t|+6-t+8-t+8-t$, was vereinfacht $W(t)=|4-t|+35$ ergibt.

1.2.1 die Summe der Abstände zum Gemeinschaftshaus ist minimal

Um das Minimum des Gesamtweges zu ermitteln, ist eigentlich die Ableitung der Funktion W zu bilden und Null zu setzen. Da es sich hier um eine Funktion mit einem Betragsterm handelt, ist diese in allen Stellen außer bei $t=4$ differenzierbar. Um Probleme bei der analytischen Extremumsbestimmung zu umgehen, sei hier einfach ein Blick auf den Graphen von W getan (siehe Abbildung 3).

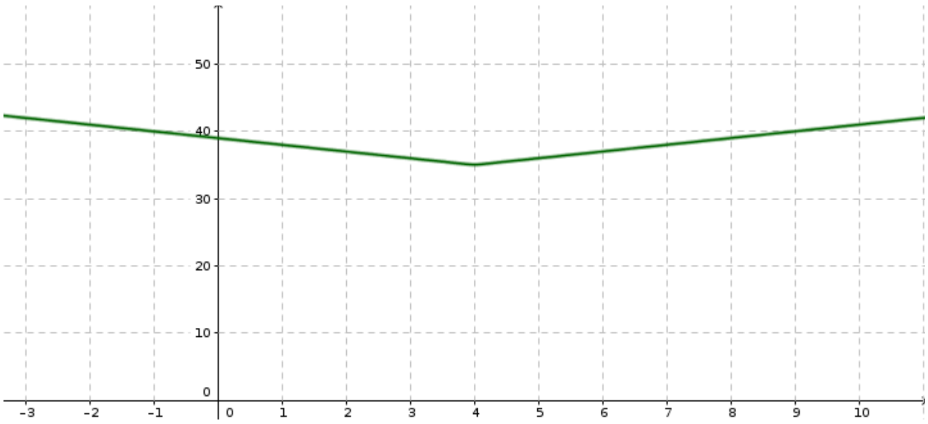


Abbildung 3: Graph der Funktion W

Aus den Eigenschaften einer Betragsfunktion und des links abgebildeten Graphen lässt sich das Extremum, genauer das Minimum dieser Funktion mit $t=4$ bestimmen. Somit befindet sich der Punkt bei dem die Summe aller Abstände zum Gemeinschaftshaus minimal wird 400 Meter rechts vom Punkt A und damit genau an der Stelle an dem das Wohnhaus H_4 steht. In diesem Fall kann nun die Nutzung dieses Wohnhauses umgewidmet, ein neues Haus gebaut oder ein Anbau durchgeführt werden. Das Minimum der Summe der Abstände beträgt 3.500 Meter.

1.2.2 die Summe der Quadrate aller Abstände der Wohnhäuser zum Gemeinschaftshaus ist minimal

Der Term für die Weglänge wird wie folgt modifiziert:
$\widehat{W}=\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_2\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_3\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_4\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_5\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_6\mathrm{G}}^2+\overline{\mathrm{H}_7\mathrm{G}}^2$

Dadurch ändert sich auch die zugehörige Funktionsterm zu
$\widehat{W}(t)=(9+t)^2+(3+t)^2+(1+t)^2+(|4-t|)^2+(6-t)^2+(8-t)^2+(8-t)^2$, was ausquadriert Folgendes ergibt: $\widehat{W}(t)=7\cdot t^2-26\cdot t+271$

Abgeleitet und Null gesetzt führt das zu $\widehat{W}(t)'=14\cdot t-26=0$, was für den Parameter $t=\frac{13}{7}\approx 1{,}86$

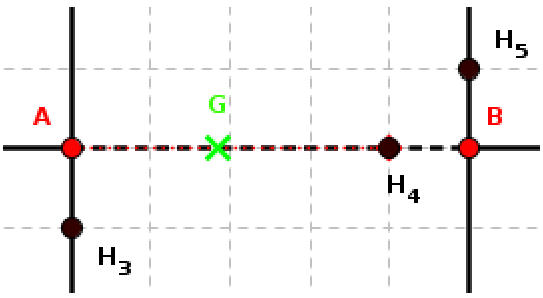


Abbildung 4: Lage des Gemeinschaftshauses im Fall Summe der Quadrate der Entfernungen

liefert. Das Gemeinschaftshaus befindet sich unter den hier beschriebenen Bedingungen ungefähr 186 Meter rechts vom Punkt A (siehe Abbildung 4). Die Summe der Quadrate der Abstände beträgt rund 24.686 Meter.

1.2.3 der maximale Abstand eines Wohnhauses zum Gemeinschaftshaus ist minimal

Abbildung 5 zeigt die Ermittlung des Minimums der maximalen Abstände, was einem Randminimum mit dem Parameterwert $t=0$ führt, bei dem $F_1(0)=9$ liefert. Das bedeutet, dass der minimale Maximalabstand 900 Meter beträgt. Das Gemeinschaftshaus ist in diesem Fall genau im Punkt A zu errichten.

Die Bezeichnungen F_i stehen für unter 1.2 gemachten Streckendefinitionen, hier als Funktionen in Abhängigkeit des Parameters t dargestellt.

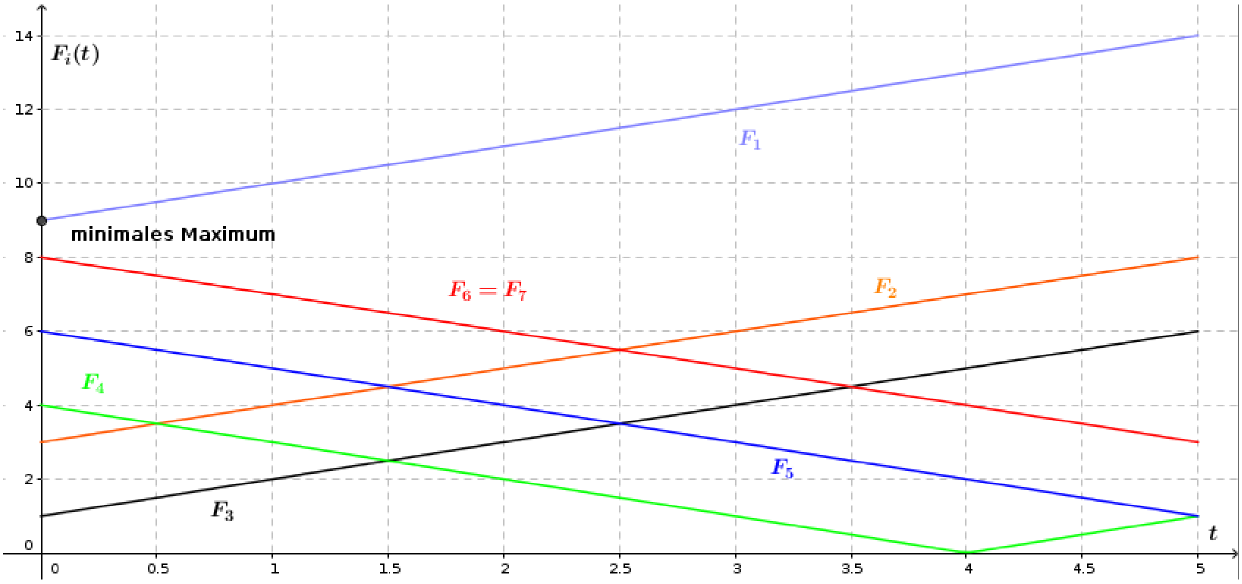


Abbildung 5: graphische Ermittlung des Minimums des Maximalabstandes

1.2.4 der minimale Abstand eines Wohnhauses zum Gemeinschaftshaus ist aus Lärmschutzgründen maximal

Da es hier wie oben schon erwähnt, der direkte Abstand (Luftlinie) Anwendung findet, müssen einige Längenberechnungen von Strecken modifiziert werden. Die Strecken $\mathrm{H_1G}$, $\mathrm{H_4G}$ und $\mathrm{H_7G}$ bleiben unverändert. Die Längen aller anderen Strecken ändern sich wie folgt:

$$\overline{\mathrm{H_2G}}'=\sqrt{3^2+t^2}=\sqrt{9+t^2}$$
$$\overline{\mathrm{H_3G}}'=\sqrt{1^2+t^2}=\sqrt{1+t^2}$$
$$\overline{\mathrm{H_5G}}'=\sqrt{1^2+(5-t)^2}=\sqrt{1+25-10\cdot t+t^2}=\sqrt{t^2-10\cdot t+26}$$
$$\overline{\mathrm{H_6G}}'=\sqrt{3^2+(5-t)^2}=\sqrt{9+25-10\cdot t+t^2}=\sqrt{t^2-10\cdot t+34}$$

Die Ermittlung des minimalen Maximalabstandes erfolgt wiederum graphisch (siehe Abbildung 6). Auch hier stehen wieder die F_i für die den Strecken entsprechenden Funktionen in Abhängigkeit des Parameters t.

In diesem Fall lässt sich für den Parameter der Wert $t=1{,}875$ ermitteln, was einem Abstand von 215,5 Metern vom Gemeinschaftshaus für die Wohnhäuser $\mathrm{H_3}$ und $\mathrm{H_4}$ entspricht (siehe Abbildung 7).

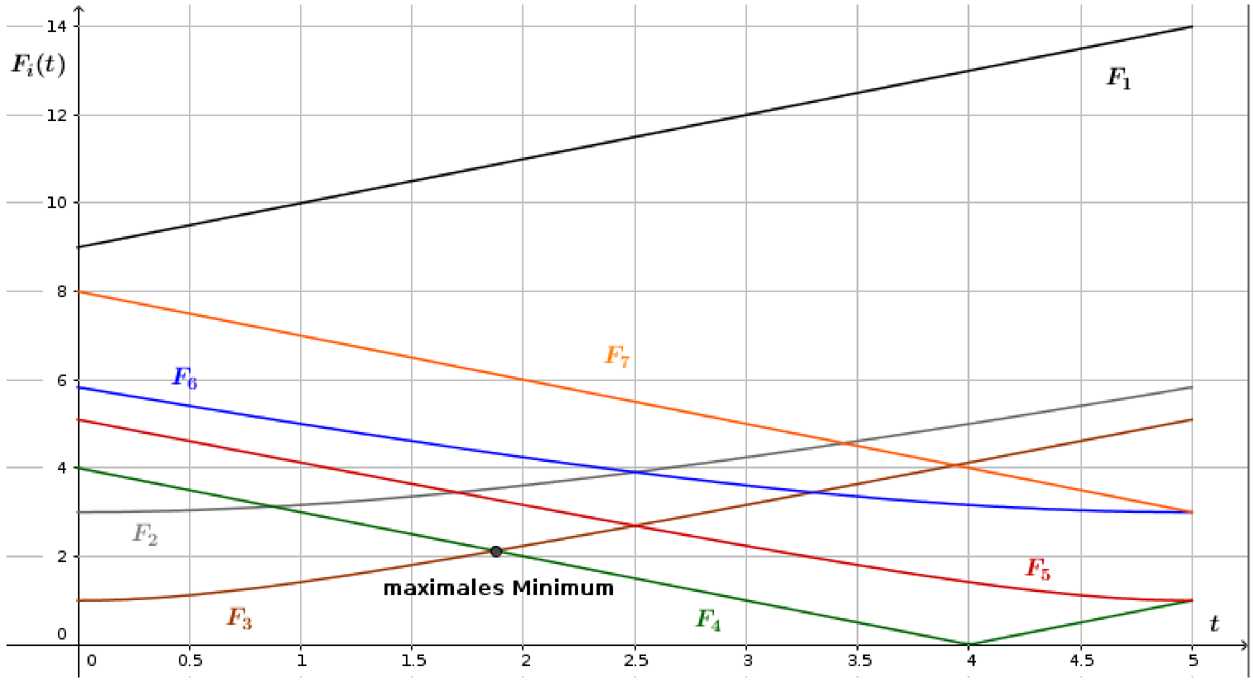


Abbildung 6: graphische Ermittlung des Maximums des Minimalabstandes

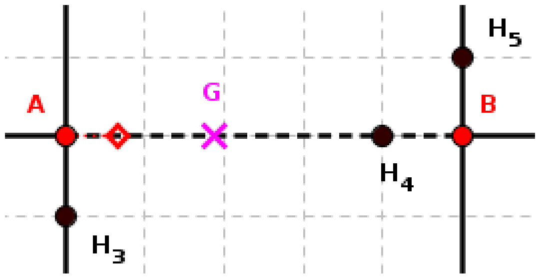


Abbildung 7: Lage des Gemeinschaftshauses im Fall maximaler Minimalabstand

1.3 weitere Informationen

Die für die Lösung dieser Aufgabe verendeten GeoGebra-Dateinen sind unter http://www.matkit.at/mentoring/fachdidaktik/altenheim abrufbar (siehe Abbildung 8).

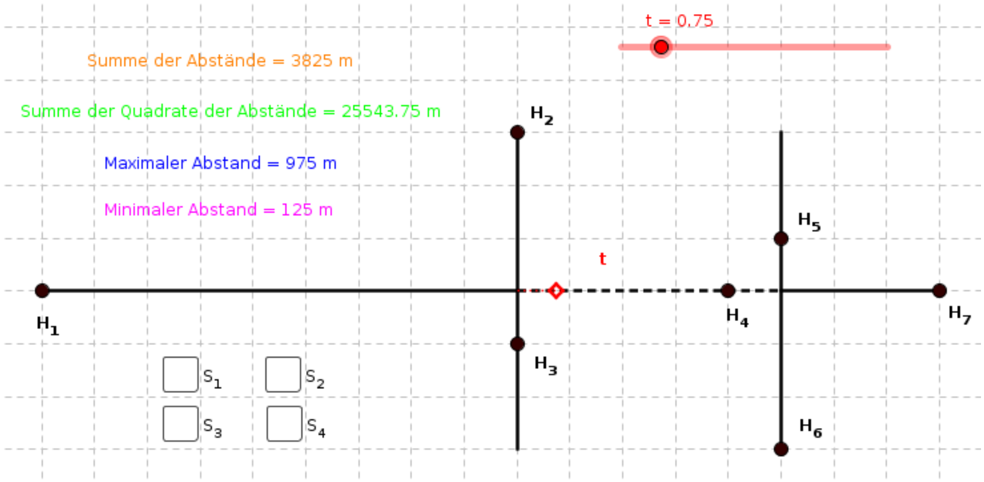


Abbildung 8: GeoGebra-Applet zum *Altenheim-Problem*

2 Modellierungsaufgabe *Super Size Me* – Hans Humenberger, Modellieren und Anwendungen im Mathematikunterricht

2.1 Aufgabe

In unten stehender Abbildung ist die Angabe zum Modellierungsproblem *Super Size Me* abgebildet. Bei dieser Aufgabe geht es um die Modellierung der Massenzunahme Morgan Spurlocks in einem Selbstversuch, in dem er sich 30 Tage lang ausschließlich von Produkten der Fast-Food-Restaurant-Kette McDonalds ernährt.

Als weitere Informationen sind folgende Daten angegeben:

- tägliche Energiezufuhr: 5.000 kcal (Kilokalorien[1])
- Masse[2] zu Beginn des Versuches: 84 kg (Kilogramm)
- Masse am Ende des Versuches: 95,5 kg
- keine körperliche Belastung (weniger als 2.000 Schritte täglich)

Die weiteren angegeben Regeln des Selbstversuches sind für Modellierung der Massenzunahme nicht relevant[3].

Modellierungsaufgaben – Workshop

Super Size Me[1]
In seinem berühmten Film hat sich Morgan SPURLOCK einem Selbstversuch ausgesetzt:
30 Tage Ernährung ausschließlich bei McDonald's, und zwar durchschnittlich 5000 kcal pro Tag, wobei er sich so gut wie keiner körperlichen Belastung aussetzte (weniger als 2000 Schritte pro Tag).
Das Ergebnis des Versuchs war eine Gewichtszunahme von 84 kg auf 95,5 kg.

1. Wie kann die ungefähre Entwicklung des Gewichts in diesen 30 Tagen vor sich gegangen sein? Ist das im Film dargestellte Ergebnis des Experiments realistisch? Falls ja, hätte man die Gewichtszunahme von Morgan SPURLOCK auch im Vorfeld durch ein mathematisches Modell prognostizieren können?
2. Wie würde eine andere Person (z. B. mit Ausgangsgewicht 70 kg) unter vergleichbaren Umständen zunehmen?
3. Wie könnte die Gewichtsentwicklung bei dieser Ernährung weitergehen? Würde sich das Gewicht bei einem bestimmten Wert „einpendeln“? Wenn ja, bei welchem?

Abbildung 9: Angabe zum Modellierungsproblem *Super Size Me*

1 Die korrekte physikalische Einheit der Energie lautet **Joule**. Da allerdings im täglichen Sprachgebrauch und auch in der verwendeten Literatur die Bezeichnung Kalorien gebraucht wird, verwendet ich diese Einheit bei den durchgeführten Berechnungen.
2 Statt der im Alltag gebräuchlichen (und auch in der Angabe verwendeten) Bezeichnung **Gewicht** verwende ich hier die physikalisch korrekte Bezeichnung **Masse**.
3 Morgen Spurlock musste eine Super-Size-Portion bestellen, wenn er danach gefragt wurde. Effekte bezüglich der Portionsgröße bei Kindern untersucht [6], für weitere psychologische Effekte des Filmes siehe [4].

2.2 eigene Modellierung

Grundidee der Modellierung ist folgende. Über die Nahrung wird eine bestimmte Energiemenge aufgenommen. Auf Grund der körperlichen Beschaffenheit (Geschlecht, Alter, Größe und Masse), sowie dem Wissen über die fehlende körperliche Betätigung, lässt sich berechnen, wie viele Kalorien der Körper pro Tag benötigt, um die grundlegenden Vorgänge zur Lebenserhaltung durchführen zu können. Die darüber hinaus gehende Energie in der Nahrung wird in Fett umgewandelt und im Körper gespeichert.

Die in der Literatur am häufigsten verwendete Formel zur Berechnung der Kalorien des menschlichen Grundumsatzes[4] ist die Benedict-Harris-Formel[5] (siehe [8]). Diese lautet für Männer

$$G=66{,}4730+13{,}7516\cdot w+5{,}0033\cdot s-6{,}7550\cdot a\ ,$$

wobei G den Grundumsatz in Kilokalorien, w die Masse in Kilogramm, s die Größe in Zentimeter und a das Alter eines Mannes in Jahren angibt. Zur Berechnung des Grundumsatzes sind nun die Daten der Versuchsperson Morgan Spurlocks notwendig.

Das Alter von Herrn Spurlock betrug zum Zeitpunkt des Filmes (2004) 34 Jahre[6]. Die Größe und Masse wurde vor Beginn des Selbstversuches während der Dreharbeiten gemessen. Die Messung ergab eine Größe von 6 Fuß und 2 Inch[7] (umgerechnet und gerundet zu 188 cm) und eine Masse von 185,5 Pfund[8] (gerundet 84,0[9] Kilogramm). Die Endmasse wurde zu 210 Pfund[10] (umgerechnet und gerundet 95,5 Kilogramm) bestimmt.

Dies führt beim Hauptdarsteller zu einer linearen Funktion für den Kaloriengrundverbrauch in Abhängigkeit von seiner Masse, der Funktionsterm lautet

$$G(w)=66{,}4730+13{,}7516\cdot w+5{,}0033\cdot 188-6{,}7550\cdot 34=777{,}4234+13{,}7516\cdot w\ .$$

Für den ersten Tag ergibt das einen Kalorienverbrauch von $G(84{,}0)=777{,}4234+13{,}7516\cdot 84{,}0\approx 1.933$ kcal. Jetzt muss noch der Kalorienverbrauch seiner (geringen, aber doch vorhandenen) Bewegung mit eingerechnet werden. Herr Spurlock soll weniger als 2.000 Schritte pro Tag gehen. Angenommen er erreicht dieses Maximum jeden Tag, muss für diese Anzahl von Schritten der Kalorienverbrauch abgeschätzt werden.

Laut [22] verbraucht ein Mann mit 90 kg beim Gehen mit einer Geschwindigkeit von 3 Kilometer pro Stunde (was einer *normalen* Gehgeschwindigkeit entspricht) rund 300 kcal pro Stunde, also pro 1.000 Meter rund 100 kcal. Mit der aus [11] entnommenen Formel[11] $y=2{,}16\cdot x+15{,}22$ lässt sich durch Umformung zu $\frac{y-15{,}22}{2{,}16}=x$ die Schrittlänge in Abhängigkeit von der Körpergröße mit 80 cm für die Versuchsperson bestimmen.

Damit legt Herr Spurlock $2.000\cdot 0{,}8=1.600$ Meter zurück, was einem Kalorienverbrauch von rund 160 kcal entspricht. Zusätzlich zu seinem oben berechneten Grundumsatz verbraucht der Hauptdarsteller also zusätzlich diese Energie.

---

4 Dabei handelt es sich um jene Energiemenge, die ein Körper braucht, um die lebensnotwendigen Vorgänge zur Lebenserhaltung durchführen zu können. Für weitere Informationen zu diesem Thema, sowie zum Leistungsumsatz (zusätzlicher Energieverbrauch bei körperlicher Betätigung), siehe [1].
5 Diese Formel wurde im Laufe der Zeit immer wieder überprüft und angepasst, siehe [17] und [13]. Allerdings ist die Ursprungsformel noch immer in Gebrauch und liefert die besten Ergebnisse. Es gibt für Männer und Frauen zwei unterschiedliche Formeln. Zu beachten ist, dass mit zunehmenden Alter der Energiebedarf des Menschen abnimmt.
6 siehe http://de.m.wikipedia.org/wiki/Morgan_Spurlock (24 04 16)
7 siehe [18], TC 00:09:38 – 00:09:45
8 siehe [18], TC 00:10:24 – 00:10:31
9 Aus der Angabe lässt sich schließen, dass die Massen auf halbe Kilogramm gerundet angegeben sind.
10 siehe [18], TC 01:29:15 – 01:29:37
11 *y* steht hier für die Körpergröße und *x* für die Schrittlänge, beides in Zentimeter.

Bei einer Aufnahme von 5.000 kcal verbraucht Herr Spurlock nun $1.933+160=2.093$ kcal am ersten Tag des Versuches, er nimmt also $5.000-2.093=2.907$ Kilokalorien mehr auf als er für die Erhaltung der Körperfunktionen benötigt. Diese überschüssige Energie wird in seinem Körper als Fett gespeichert.

Nun ist zu berechnen welcher Massenzunahme dieser Energieüberschuss entspricht. Die Kalorienwerte für ein Kilogramm Körperfett variieren doch deutlich, wenn man auf den entsprechenden Seiten im Internet nachschaut. Werte zwischen 7.000 und 9.000 kcal[12] werden dort genannt. Der Brennwert eines Kilogramm Fettes wird mit rund 9.000 Kilokalorien angegeben. Da aber Wasser eingelagert ist, besteht Körperfett nur zu rund 85 Prozent aus Fett[13], was einen Kalorienwert von $9.000\cdot 0{,}85=7.650$ kcal ergibt, welchen ich für meine Berechnungen verwendet habe.

Morgan Spurlock vergrößert daher seine Masse am ersten Tag um rund $\frac{2.907}{7.650}\approx 0{,}38$ kg. Für jeden weiteren Tag lässt sich nun die benötige Kalorienmenge für den Grundumsatz und den Leistungsumsatz für seine maximal 2.000 Schritte berechnen. Draus lässt sich wiederum ableiten wie hoch die Einlagerung von Fettmasse und dadurch die Erhöhung seiner Gesamtmasse ist.

Mathematisch wird dies mittels der Verwendung der Tabellenansicht (siehe Abbildung 10) in GeoGebra erreicht.

Tabelle

B35 =B34 + D34

	A	B	C	D
1				
2				
3	**Zeit**	**Masse**	**Überschuss**	**Fett**
4	0	84	2907.4422	0.3801
5	1	84.3801	2902.2158	0.3794
6	2	84.7594	2896.9988	0.3787
7	3	85.1381	2891.7912	0.378
8	4	85.5161	2886.5929	0.3773
9	5	85.8935	2881.404	0.3767
10	6	86.2701	2876.2244	0.376
11	7	86.6461	2871.0541	0.3753
12	8	87.0214	2865.8931	0.3746
13	9	87.396	2860.7414	0.374
14	10	87.77	2855.5989	0.3733
15	11	88.1433	2850.4657	0.3726
16	12	88.5159	2845.3417	0.3719
17	13	88.8878	2840.227	0.3713
18	14	89.2591	2835.1214	0.3706
19	15	89.6297	2830.025	0.3699

Abbildung 10: Tabellenansicht des GeoGebra-Files

12 siehe z. B. http://www.sueddeutsche.de/leben/fitness-schneller-weiter-leichter-1.239643 (24 04 16) oder http://www.gutefrage.net/frage/wie-viel-kalorien-sind-1kg-koerperfett (24 04 16)

13 siehe https://www.quora.com/How-many-calories-are-there-per-gram-of-body-fat (25 04 16) oder https://www.paleohacks.com/weight-loss/are-there-really-7700-calories-in-a-kilo-of-bodyfat-21647 (25 04 16) bzw. http://fitness.stackexchange.com/questions/193/how-many-calories-to-burn-daily-to-see-a-change-in-weight-within-a-month (25 04 16)

Dabei steht die erste Spalte (Zeit) für den Tag des Versuches, die zweite Spalte für die Masse von Morgan Spurlock am Beginn des entsprechenden Tages, die dritte Spalte für den Energieüberschuss in Kilokalorien und die vierte Spalte für die eingelagerte Fettmasse in Kilogramm.

Die modellierte Differenzengleichung für die Masse lautet

$m_{t+1}=m_t+\frac{4.840-777{,}4234-13{,}7516\cdot m_t}{7.650}$ mit $m_0=84{,}0$. Mit m_0 wird der Startwert, in diesem Fall die Anfangsmasse von Herrn Spurlock bezeichnet. Der Wert 4.840 setzt sich aus der zugeführten Kalorienmenge (5.000 kcal) abzüglich der verbrauchten Energie durch die 2.000 Schritte zusammen (160 kcal). Der Term $777{,}4234-13{,}7516\cdot m$ beschreibt sein Grundumsatz-Klorienverbrauch laut Benedict-Harris-Formel, der von dem vorher ermittelten Kalorienwert abzuziehen ist. Abschließend wird noch durch die Kalorienzahl für ein Kilogramm Körperfett dividiert, um eine Masse zu erhalten, welcher zur Masse der Versuchsperson vom Vortag addiert wird.

Die Tabelle in Abbildung 11 zeigt die Entwicklung der Masse des Hauptdarstellers in Abhängigkeit von der Zeit mit oben beschriebenen Spaltenbedeutungen.

Zeit [Tag]	Masse [kg]	Überschuss [kcal]	Fett [kg]
0	84,0	2907	0,38
1	84,4	2902	0,38
2	84,8	2897	0,38
3	85,1	2892	0,38
4	85,5	2887	0,38
5	85,9	2881	0,38
6	86,3	2876	0,38
7	86,6	2871	0,38
8	87,0	2866	0,37
9	87,4	2861	0,37
10	87,8	2856	0,37
11	88,1	2850	0,37
12	88,5	2845	0,37
13	88,9	2840	0,37
14	89,3	2835	0,37
15	89,6	2830	0,37
16	90,0	2825	0,37
17	90,4	2820	0,37
18	90,7	2815	0,37
19	91,1	2810	0,37
20	91,5	2805	0,37
21	91,8	2800	0,37
22	92,2	2795	0,37
23	92,6	2790	0,36
24	92,9	2785	0,36
25	93,3	2780	0,36
26	93,7	2775	0,36
27	94,0	2770	0,36
28	94,4	2765	0,36
29	94,7	2760	0,36
30	95,1	2755	0,36
31	95,5		

Abbildung 11: Entwicklung der modellierten Masse für Morgan Spurlock

Die Masse des Hauptdarstellers am Ende des Versuchszeitraumes (also zu Beginn des 31. Tages) beträgt 95,5 Kilogramm, also genau diejenige Masse, die beim Abwiegen am Ende festgestellt wurde.

Bei dieser Art von Massenzunahme handelt es sich um ein beschränktes Wachstum. Die Zunahme pro Tag wird immer geringer, es wird also nach einer bestimmten Zeitspanne eine Schranke, in diesem Fall eine Maximalmasse, erreicht. Diese Höchstmasse lässt sich berechnen, indem man jene Masse ermittelt, bei der der Grundumsatz genau der zugeführten Kalorienanzahl entspricht. Dabei wird angenommen, dass der Energieverbrauch für die Bewegung annähernd konstant bleibt. Dies ist vertretbar, weil der Energiebedarf bei der Bewegung (Gehen) von der Masse der Person abhängt, die Anzahl der Schritte aber sicherlich mit der Massenzunahme geringer wird.

Die Höchstmasse[14] lässt sich durch die Gleichung $4.840=777{,}4234+13{,}7516\cdot m$ bestimmen. Die obere Schranke mit den in diesem Versuch vorgegeben Parametern lautet $s=295{,}5$ kg.

Die Funktion m, welche dieses beschränkte Wachstum[15] beschreibt, besitzt die Termdarstellung $m(t)=s-(s-m_0)\cdot e^{-k\cdot t}$, mit eingesetzten Parametern $m(t)=295{,}5-211{,}5\cdot e^{-k\cdot t}$. Jetzt ist noch der Faktor *k* im Exponenten der Exponentialfunktion zu bestimmen.

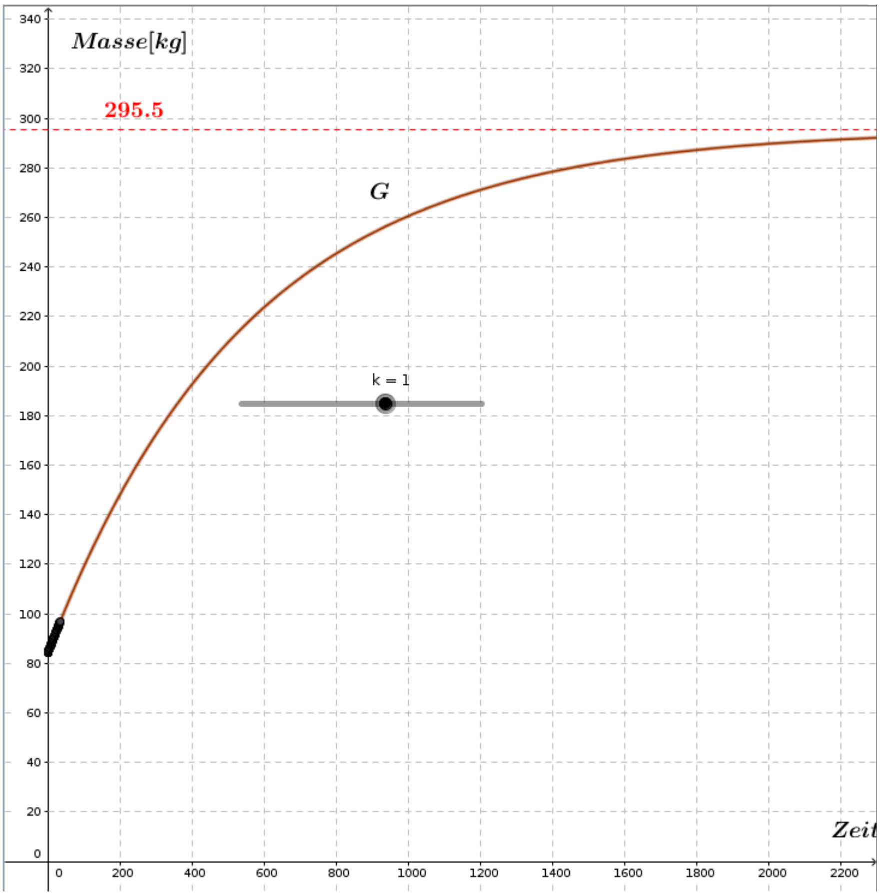


Abbildung 12: Graph der ermittelten Funktion für das beschränkte Wachstum der Körpermasse von Morgan Spurlock

Mit Hilfe des Befehls `Trend[ <Liste von Punkten>, <Funktion> ]` lässt sich in GeoGebra der fehlende Parameter beziehungsweise die Funktionsgleichung selbst ermitteln. Dazu ist zuvor ein

14 Diese Höchstmasse ist die Antwort auf Frage 3 der Angabe.
15 siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Beschr%C3%A4nktes_Wachstum (28 04 16)

Schieberegler zu erstellen und mit den Standardeinstellungen festzulegen. Der Wert dieses Schieberegler dient als Saatwert[16] zur numerischen Ermittlung jenes Parameterwertes der am beste die gegeben Datenwerte (Punkte) fittet. Diese Punkte sind mittels Liste aus der Tabellenansicht zu übernehmen.Die so ermittelte Funktion m lautet $m(t)=295{,}5-211{,}5\cdot e^{-0{,}00180\cdot t}$. Der Graph der Funktion ist in Abbildung 12 angegeben. Die GeoGebra-Datei zu dieser Aufgabe ist unter http://www.matkit.at/mentoring/super_size_me zur Verfügung gestellt.

Zur Beantwortung von Frage 2 der Angabe nimmt man die Funktion m und modifiziert entsprechend der Anfangsmasse m_0 den Koeffizienten vor dem Exponentialterm laut $295{,}5-m_0$. Die Grenzmasse bleibt dieselbe. Eine Person mit der Anfangs Masse $m_0=70$ kg würde in der Versuchsphase innerhalb von 30 Tagen diese auf 82,0 kg vergrößern.

Für den Verlauf der Graphen mit den Anfangsmassen 70 kg sowie 84 kg siehe Abbildung 13. Eine GeoGebra-Datei mit einem Schieberegler für die Anfangsmasse m_0 ist unter oben angegebener Internet-Adresse abrufbar.

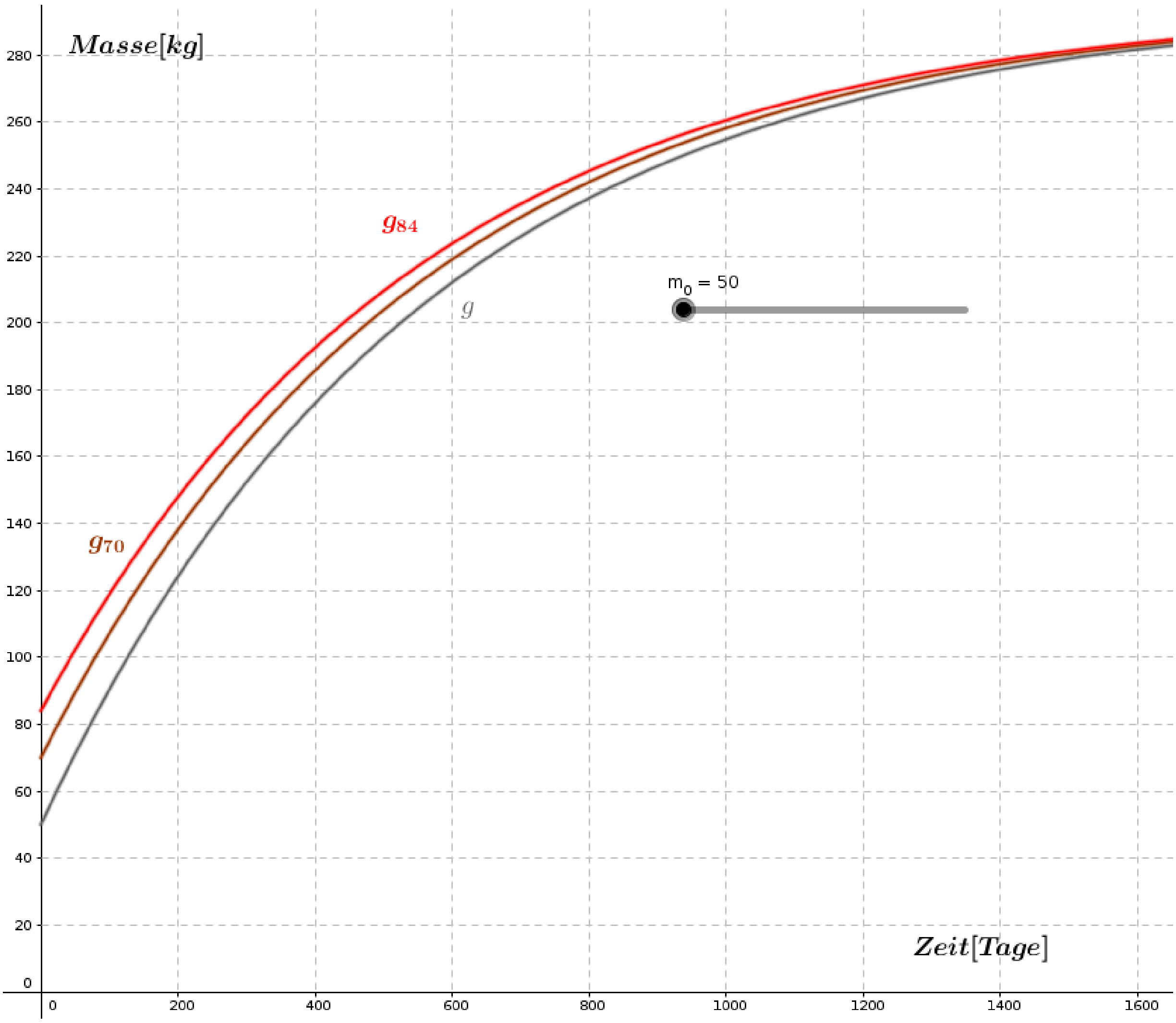


Abbildung 13: Graph der Massenzunahme mit unterschiedlichen Anfangsmassen

16 Hier ist ein Startwert (*seed*) für jenes Verfahren gemeint, mit dem GeoGebra intern die entsprechende Funktion approximiert.

2.3 weitere Informationen

Der Selbstversuch von Morgan Spurlock scheint ein ideales Beispiel zu sein, um Schüler und Schülerinnen für das Modellieren von mathematischen Zusammenhängen zu begeistern. Sowohl US- (siehe [14]) als auch österreichische Quellen (siehe [15] und [16]) haben sich bereits dieses Themas angenommen.

Weiterführende Informationen zum Thema Fast Food wurden speziell von Ö1 für die Schule aufgearbeitet (siehe [21]).

Für weitere Informationen zum Thema Modellierung im Allgemeinen und zum Thema *Super Size Me* im Besonderen sind [5], [7], [9] und [10], sowie [19] und [20] empfohlen.

3 Untersuchung eigener schriftlicher Maturaangaben auf fachliche und sprachliche Korrektheit – Franz Embacher, Fachliche und sprachliche Kompetenz

3.1 Aufgabenstellung

In diesem Teil untersuche ich, die im Laufe der Zeit von mir zusammengestellten Angaben zur schriftlichen Reifeprüfung (nur Haupttermine) vor Beginn der zentralen schriftlichen Reifeprüfung. Diese Angaben habe ich hinsichtlich dreier Aspekte überarbeitet und geändert.

- Erster Punkt sich fachliche Mängel oder fachliche Fehler in der Formulierung der Aufgaben, die rot gekennzeichnet sind (dazu zähle ich auch Grammatik- und Rechtschreibfehler).
- Zweiter Aspekt ist die sprachlich und fachsprachliche Exaktifizierung und Erhöhung der Verständlichkeit der Aufgabenstellung für Schülerinnen und Schüler. Diese Änderungen sind grün markiert.
- Drittens wurden die Angaben hinsichtlich der Schreibweisen bei der neuen zentralen schriftlichen Reifeprüfung (siehe [2]) und der verwendeten kompetenzorientierten Fragestellungen (siehe [12]) überarbeitet. Diese Modifikationen sind in blauer Schrift.

3.2 Klausuraufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung zum Haupttermin aus dem Schuljahr 2006/2007

Klausur[17] eines ORG mit ergänzendem Unterricht in Physik, Chemie und Biologie und Umweltkunde. Die Matura umfasst fünf Aufgaben aus den Gebieten Matrizenrechnung, Exponentialfunktion (inklusive Herleitung aus einer Differenzialgleichung), Lösen von Gleichungen, Binomialverteilung und Schnitt von Graphen von Funktionen mit Integralberechnung.

3.2.1 ursprüngliche Angabe – Beispiel 1

a Definiere die Begriffe **Matrix** und **Determinante**!

b Zeige an Hand einer allgemeinen 2x2-Matrix, dass $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das Einselement der Matrizenmultiplikation ist. Verifiziere diese Aussage mittels $I \cdot A = A \cdot I = A$!

c Eine geheime, aus vier Buchstaben bestehende Botschaft, ist mit der Verschlüsselungsmatrix $\boldsymbol{V_i}$ chiffriert. Um welche der drei untenstehenden Matrizen handelt es sich? Begründe Deine Wahl! Die Verschlüsselungsgleichung lautet $G = V_i \cdot U$.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Der verschlüsselte Text lautet **R X E Y**. Dechiffriere die Botschaft!

17 online abrufbar unter http://www.matkit.at/dateien/schul/mathematik/matura/matura_aufgaben_8n1_m_2007.pdf (07 05 16)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		

3.2.2 überarbeitete Angabe – Beispiel 1

a Definieren Sie die Fachbegriffe **Matrix** und Determinante im mathematischen Kontext!

b Beweisen Sie an Hand einer allgemeinen 2x2-Matrix, dass $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ das Einselement der Matrizenmultiplikation ist. Verwenden Sie dazu die Gleichung $I\cdot A=A\cdot I=A$!

c Eine geheime, aus vier Buchstaben bestehende Botschaft, ist mit der Verschlüsselungsmatrix $\boldsymbol{V_i}$ (mit i = 1,2,3) chiffriert. Welche der drei untenstehenden Matrizen wurde bei der Verschlüsselung verwendet? Begründen Sie Ihre Wahl! Die Verschlüsselungsgleichung lautet $G=V_i\cdot U$.

$$V_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\qquad V_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad V_3=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

Der verschlüsselte Text lautet **R X E Y**. Dechiffrieren Sie die Botschaft!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		

3.2.3 ursprüngliche Angabe – Beispiel 2

a Wenn Licht in Meerwasser eindringt, nimmt die Intensität $B(\tau)$ (Einheit Wm^{-2}) des Lichtes mit zunehmender Tiefe τ ab. Die Änderung der Lichtintensität ist von einer Materialkonstante λ des Wassers abhängig. Stelle den für dieses Problem angepassten Differenzialgleichungsansatz auf!

b Löse die unter a aufgestellte Differenzialgleichung. Bestimme die Integrationskonstante so, dass der Graph der Lösung durch den Punkt $P(0/1367)$ [18]geht.

c Bestimme die Materialkonstante λ (6 Nachkommastellen) derart, dass in einer Tiefe von 1,2 Meter die Strahlungsintensität auf 270 Wm^{-2} abgefallen ist.

d Berechne die *Halbwertstiefe*! Worum handelt es sich bei diesem Begriff?

3.2.4 überarbeitete Angabe – Beispiel 2

a Wenn Licht in Meerwasser eindringt, nimmt die Intensität $B(\tau)$ (Einheit Wm^{-2}) des Lichtes mit zunehmender Tiefe τ (in Meter) ab. Die Änderung der Lichtintensität ist von einer Materialkonstante λ des Meerwassers abhängig. Stellen Sie den für dieses Problem angepassten

18 Der Wert 1376 Wm^{-2} gibt die Strahlungsleistung der Sonne pro Quadratmeter an der Erdoberfläche an.

Differenzialgleichungsansatz auf!

b Berechnen Sie die Lösung, der unter a aufgestellte Differenzialgleichung. Bestimmen Sie die Integrationskonstante so, dass der Graph der Lösungsfunktion durch den Punkt $P(0/1367)$ [19] geht.

c Bestimmen Sie die Materialkonstante λ (gerundet auf 6 Nachkommastellen) derart, dass in einer Tiefe von 1,2 Meter die Strahlungsintensität auf 270 Wm^{-2} abgefallen ist.

d Berechnen Sie jene Tiefe, bei der die Strahlungsintensität auf die Hälfte abgenommen hat. Diese Tiefe wird *Halbwertstiefe* genannt! Erläutern Sie, worum es sich bei diesem Begriff handeln könnte.

3.2.5 ursprüngliche Angabe – Beispiel 3

a Berechne alle Lösungen der Gleichung $x^4 - x^2 - 6 = 0$ über den komplexen Zahlen!

b Von der Gleichung $x^5 - 9x^4 - 21x^3 + 271x^2 - 142x - 1360 = 0$ sind die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4 + i$ gegeben. Berechne die restlichen Lösungen! Erläutere die Anzahl und Art der Lösungen mittels mathematischer Sätze.

c Finde alle Nullstellen der Gleichung $x^3 + 0{,}99x^2 - 2{,}1121x - 0{,}242979 = 0$ mittels Newton'schen Näherungsverfahren!

3.2.6 überarbeitete Angabe – Beispiel 3

a Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^4 - x^2 - 6 = 0$ über dem Körper der komplexen Zahlen!

b Von der Gleichung $x^5 - 9x^4 - 21x^3 + 271x^2 - 142x - 1360 = 0$ sind die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4 + i$ bekannt. Ermitteln Sie die restlichen Lösungen! Erläuteren Sie die Anzahl und Art[20] der Lösungen der gegebenen Gleichung mittels mathematischer Sätze.

c Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^3 + 0{,}99x^2 - 2{,}1121x - 0{,}242979 = 0$ mittels Newton'schen Näherungsverfahrens!

3.2.7 ursprüngliche Angabe – Beispiel 4

Die Suche nach Erdöl ist riskant und sehr kostenintensiv. Deshalb wird oft auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgegriffen um Material zu sparen. Aus Erfahrung weiß man, dass nach eingehenden Voruntersuchungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 Prozent bei einer Probebohrung Öl gefunden wird. Um ein neues Ölfeld zu untersuchen, führt eine Firma 60 Probebohrungen durch.

a Berechne die Wahrscheinlichkeit bei **genau** 10, 11, 12, 13 oder 14 Bohrungen Öl zu finden und stelle das Ergebnis in einem Wahrscheinlichkeitsfunktionsdiagramm dar! [Wahrscheinlichkeit $0{,}02 \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$]

---

19 Der Wert 1376 Wm^{-2} gibt die Strahlungsleistung der Sonne pro Quadratmeter an der Erdoberfläche an.
20 Hier ist gemeint, warum die Gleichung nur eine bestimmte Anzahl von Lösungen haben kann, und wie diese Lösungen in Bezug auf reelle und konjugiert komplexe Lösungen aussehen. Den SchülerInnen war diese Art der Aufgabenstellung bekannt.

b Bestimme die Wahrscheinlichkeit bei **mindestens einer** Bohrung Öl zu finden!

c Wie viele Bohrungen wären durchzuführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 Prozent Öl in diesem Gebiet zu finden?

d Überprüfe, ob die obige Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden kann. Wenn ja, vergleiche den Wert $P(10 \leq X \leq 14)$ der Binomialverteilung mit dem entsprechenden Wert der Normalverteilung. Wie groß ist die Differenz der beiden Werte? Verwende die Stetigkeitskorrektur!

3.2.8 überarbeitete Angabe – Beispiel 4

Die Suche nach Erdöl ist riskant und sehr kostenintensiv. Deshalb wird oft auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgegriffen um Material zu sparen. Aus Erfahrung weiß man, dass nach eingehenden Voruntersuchungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 Prozent bei einer Probebohrung Öl gefunden wird. Um ein neues Ölfeld zu untersuchen, führt eine Firma 60 Probebohrungen durch.

a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei **genau** 10, 11, 12, 13 beziehungsweise 14 Bohrungen Öl zu finden und stellen Sie das Ergebnis als Graph einer Wahrscheinlichkeitsfunktion dar! [Wahrscheinlichkeit $0{,}02 \mathrel{\hat{=}} 1$ cm]

b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit bei **mindestens einer** Bohrung Öl zu finden!

c Berechnen Sie **wie viele** Bohrungen wären durchzuführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 Prozent Öl in diesem Gebiet zu finden?

d Überprüfen Sie, ob die obige Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden darf. Wenn ja, vergleichen Sie den Wert $P(10 \leq X \leq 14)$ der Binomialverteilung mit dem entsprechenden Wert der Normalverteilung. Berechnen Sie wie groß ist die Differenz der beiden Werte. Verwenden Sie bei der Berechnung die Stetigkeitskorrektur!

3.2.9 ursprüngliche Angabe – Beispiel 5

a Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $g(x) = x^2 + 2x$. Die Funktion *f(x)* schneidet die x-Achse an der Stelle x = 1 und besitzt in $W\left(-\frac{1}{3} \middle/ \frac{20}{27}\right)$ einen Wendepunkt. Zeige, dass $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ gilt!

b Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven und berechne die Flächeninhalte der beiden entstehenden Flächenstücke. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte zueinander?

3.2.10 überarbeitete Angabe – Beispiel 5

a Gegeben sind die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, sowie die Funktion *g* mit $g(x) = x^2 + 2x$. Der Graph der Funktion *f* schneidet die *x*-Achse an der Stelle *x* = 1 und besitzt in $W\left(-\frac{1}{3} \middle/ \frac{20}{27}\right)$ einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass für die Funktion *f* die Gleichung $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ gilt!

b Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen der Funktionen *f* und *g* und berechnen Sie die Flächeninhalte jener beiden Flächen, die von den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen werden. Berechnen Sie in welchem Verhältnis die beiden Flächeninhalte zueinander stehen.

3.2.11 Diskussion

Bei dieser Klausurangabe handelte es sich um die erste in meiner Berufslaufbahn zusammen gestellten Matura. Aus diesem Grund habe ich erwartet, dass hier besonders viele Fehler auftreten würden. An 19 Stellen würde ich bei einer heutigen Betrachtung eine andere beziehungsweise genauere oder eine für Schüler und Schülerinnen verständlichere Formulierung in sprachlicher Hinsicht wählen. An zwei Stellen wäre eine formale Änderung notwendig und würde man die vom BIFIE gewohnten Angabeformulierungen bevorzugen, ist eine Korrektur an 25 Stellen notwendig.

Allerdings sind auch an neun Stellen fachliche Mängel aufgetreten. Von weniger gravierenden wie der falschen Verwendung von Aufforderungen (*zeige* anstatt *beweise*) bis zur schwerwiegenden wie die unkorrekte Verwendung der Begriffe *Funktion*, *Graph einer Funktion* und *Funktionsgleichung*. Besonders im Segment der Funktionsbeschreibung weist diese Angabe etliche Fehler in fachlicher Hinsicht auf.

3.3 Klausuraufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung zum Haupttermin aus dem Schuljahr 2007/2008

Wiederum eine Klausur[21] eines ORG mit ergänzendem Unterricht in Physik, Chemie und Biologie und Umweltkunde. Diese Klausur besteht aus fünf Beispielen zu den Themengebieten (Un)Gleichungen lösen, nichtlineare analytische Geometrie, bestimmtes Integral und Näherungsmethoden, Funktionsbestimmung sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung (Gewinnerwartung und Binomialverteilung).

3.3.1 ursprüngliche Angabe – Beispiel 1

a Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! Führe die Probe durch!

$\sqrt{6+x}+\sqrt{22-2x}=\sqrt{9x+22}$ G = R

b Löse die Ungleichung für G = R! Bestimme zuerst die Definitionsmenge! Gib die Lösung in Intervallschreibweise an!

$$\frac{x-2}{x-4}>\frac{x+3}{x-5}$$

c Löse die Exponentialgleichung in R!

$$2^{x-3}-5^{x+1}+2^{x+1}=5^{x-4}-2^{x-2}$$

3.3.2 überarbeitete Angabe – Beispiel 1

a Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der gegebenen Wurzelgleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen! Führen Sie die Probe durch!

21 online abrufbar unter http://www.matkit.at/dateien/schul/mathematik/matura/matura_aufgaben_8n_m_2008.pdf (08 05 16)

$$\sqrt{6+x}+\sqrt{22-2x}=\sqrt{9x+22}$$

b Berechnen Sie die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung für die Grundmenge der reellen Zahlen! Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge! Geben Sie die Lösung in Intervallschreibweise an!

$$\frac{x-2}{x-4}>\frac{x+3}{x-5}$$

c Berechnen Sie die Lösungsmenge der gegeben Exponentialgleichung in $\mathbb{R}$!

$$2^{x-3}-5^{x+1}+2^{x+1}=5^{x-4}-2^{x-2}$$

3.3.3 ursprüngliche Angabe – Beispiel 2

Gegeben sind zwei Kreise $\mathrm{k}_1: x^2+y^2-6x-4y=12$ und $\mathrm{k}_2: x^2+y^2+8x-6y=60$.

a Bestimme die Mittelpunkte und Radien der zwei gegebenen Kreise!

b Ermittle die Schnittpunkte von k_1 und k_2!

c Bestimme den Schnittwinkel beider Kreise durch **Legen von Tangenten** und mittels **impliziter Differentiation**. Verwende den Schnittpunkt mit ganzzahligen Koordinaten!

3.3.4 überarbeitete Angabe – Beispiel 2

Gegeben sind Gleichungen zweier Kreise $\mathrm{k}_1: x^2+y^2-6x-4y=12$ und $\mathrm{k}_2: x^2+y^2+8x-6y=60$.

a Berechnen Sie die Mittelpunktskoordinaten und Länge der Radien der zwei gegebenen Kreise!

b Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von k_1 und k_2!

c Berechnen Sie den Schnittwinkel beider Kreise durch die Verfahren **Legen von Tangenten** sowie **implizite Differentiation**. Verwenden Sie den Schnittpunkt mit ganzzahligen Koordinaten!

3.3.5 ursprüngliche Angabe – Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x\cdot\ln x$. Es gilt $\int_1^2 f(\mathrm{x})\mathrm{d}x=0{,}636294261$ FE.

a Überprüfe das obige Ergebnis mittels analytischer Integration!

b Leite die Formel für die partielle Integration her!

c Worum handelt es sich beim mathematischen Begriff der Integration? Inwiefern unterscheiden sich das unbestimmte und das bestimmte Integral? Wozu dient die Integrationskonstante C?

d Nähere obiges Integral mit der Rechteckregel an! Verwende 3 äquidistante Zwischenstützstellen! Gib alle Zwischenschritte an!

e Nähere das Integral mit der Simpsonformel für n = 3 an! Gib alle Zwischenschritte an!

f Entwickle für die Funktion $f(x)$ ein Taylor-Polynom 3. Grades an der Stelle x = 1 und integriere dieses! Gib alle Zwischenschritte an!

g Welche zwei mathematischen Konzepte zur Berechnung eines bestimmten Integrals stecken hinter den Aufgaben d und e einerseits, sowie f andererseits? Erläutere diese!

3.3.6 überarbeitete Angabe – Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x) = x \cdot \ln x$. Das bestimmte Integral zwischen 1 und 2 dieser Funktion wird bestimmt durch: $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx$ 0,636294261 FE (gerundet auf 9 Nachkommastellen)

a Überprüfen Sie das obige Ergebnis mittels analytischer Integration!

b Leiten Sie die Formel für die partielle Integration her!

c Erläutern Sie wobei es sich beim mathematischen Begriff der Integration handelt? Inwiefern unterscheiden sich das unbestimmte und das bestimmte Integral? Wozu dient die Integrationskonstante? Erklären Sie diese Sachverhalte!

d Näheren Sie obiges Integral mit der Rechteckregel an! Verwenden Sie 3 äquidistante Zwischenstützstellen bei der Berechnung! Geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnung an!

e Näheren Sie das Integral mit der Simpsonformel für n = 3 an! Geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnung an!

f Entwickeln Sie für die Funktion *f* ein Taylor-Polynom 3. Grades an der Stelle x = 1 und berechnen Sie das bestimmte Integral im oben angegebenen Intervall! Geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnung an!

g Welche zwei mathematischen Konzepte zur Berechnung eines bestimmten Integrals stecken hinter den Aufgaben d und e einerseits, sowie f andererseits? Erläutern Sie diese!

3.3.7 ursprüngliche Angabe – Beispiel 4

Die Giftstoffkonzentrationen zweier wasserverschmutzender Substanzen in einem See betragen zum Zeitpunkt 0 bei Stoff A 100 mg/l, bei Stoff B 250 mg/l. Nach 10 Tagen wird die Schadstoffkonzentration noch ein Mal bestimmt: Stoff A 137 mg/l, bei Stoff B 302 mg/l
Aus Untersuchungen weiß man, dass die Konzentration des Stoffes A exponentiell, die des Stoffes B linear steigt.

a Zeige, dass Giftstoff A die Funktionsgleichung $G_A(t) = 100 \cdot e^{0{,}031481074 \cdot t}$ und Giftstoff B die Funktionsgleichung $G_B(t) = 5{,}2 \cdot t + 250$ erfüllt.

b Ermittle mittels Newton-Verfahrens (Genauigkeit 10^{-2}) zu welchem Zeitpunkt die Schadstoffkonzentrationen der beiden Gifte gleich groß ist! Zeichne dazu beide Graphen im Intervall I = [0;60] (x-Achse: $5 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$, y-Achse: $50 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$), um einen geeigneten Startwert zu erhalten. Wie groß ist die Konzentration zum berechneten Zeitpunkt?

3.3.8 überarbeitete Angabe – Beispiel 4

Die Giftstoffkonzentrationen G_A und G_B zweier wasserverschmutzender Substanzen in einem See betragen zum Zeitpunkt $t = 0$ bei Stoff A 100 Milligramm pro Liter (mg/l), bei Stoff B 250 mg/l. Nach 10 Tagen wird die Schadstoffkonzentration ein weiteres Mal bestimmt: G_A beträgt 137 mg/l, G_B 302 mg/l
Aus Untersuchungen weiß man, dass die Konzentration des Stoffes A exponentiell, die des Stoffes B linear steigt.

a Zeigen Sie, dass Giftstoff A die Funktionsgleichung $G_A(t) = 100 \cdot e^{0{,}031481074 \cdot t}$ und Giftstoff B die Funktionsgleichung $G_B(t) = 5{,}2 \cdot t + 250$ erfüllt.

b Berechnen Sie mittels Newton-Verfahrens (Genauigkeit 10^{-2}) zu welchem Zeitpunkt t die Schadstoffkonzentrationen G_A und G_B der beiden Gifte gleich groß sind! Zeichnen Sie dazu beide Graphen im Intervall I = [0;60] (x-Achse: $5 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$, y-Achse: $50 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$), um einen geeigneten Startwert zu erhalten. Berechnen Sie die Giftstoffkonzentration zum zuvor ermittelten Zeitpunkt.

3.3.9 ursprüngliche Angabe – Beispiel 5

In einem Casino wird folgendes Spiel angeboten. Es wird mit zwei Würfeln gleichzeitig geworfen. Wirft man „12“ erhält man 100 €, wirft man „11“ oder „10“ werden 50 € ausbezahlt.

a Berechne die Gewinnerwartung bei einem Einsatz von 10 €!

b Ist obiges Spiel fair? Erläutere, welche Bedingung für ein faires Spiel gelten muss. Was bedeutet eine negative Gewinnerwartung für den Spieler?

c Wie ist der Einsatz zu verändern, damit obiges Spiel fair wird? Berechne ebenfalls, wie der Gewinn bei einer „12“ zu ändern wäre, um das Spiel fair zu gestalten!

d Berechne die Wahrscheinlichkeit bei 10 Würfen genau 3 Mal eine „12“ zu werfen! Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei 8 Würfen, dass die Würfel mindestens 1 Mal eine „10“ zeigen?

e Wie oft müssen die Würfel geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 75 Prozent eine 12 zu werfen?

3.3.10 überarbeitete Angabe – Beispiel 5

In einem Casino wird folgendes Spiel angeboten. Es wird mit zwei Würfeln gleichzeitig geworfen. Wirft man die Augenzahl „12“ erhält man 100 €, wirft man die Augenzahlen „11“ oder „10“ werden 50 € ausbezahlt.

a Berechnen Sie die Gewinnerwartung bei oben erläutertem Spiel bei einem Einsatz von 10 €!

b Ist obiges Spiel fair? Erläutern Sie, welche Bedingung für ein faires Spiel gelten muss. Erklären Sie, was eine negative Gewinnerwartung für den/die SpielerIn bedeutet?

c Berechnen Sie wie der Einsatz zu verändern ist, damit obiges Spiel fair wird! Berechnen Sie ebenfalls, wie der Gewinn beim Wurf der Augenzahl „12“ zu ändern wäre, um das Spiel fair zu gestalten!

d Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei 10 Würfen genau 3 Mal eine „12“ zu werfen! Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei 8 Würfen, dass die Würfel mindestens 1 Mal eine „10“ zeigen.

e Berechnen Sie wie oft müssen die Würfel geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 75 Prozent eine „12“ zu werfen?

3.3.11 Diskussion

In der Überarbeitung habe ich in 28 Fällen eine sprachliche Exaktifizierung durchgeführt, um die Verständlichkeit zu erhöhen. In 33 Fällen ist die BIFIE-gerechte Klarstellung der Angabe und die Streichung von W-Fragen durchgeführt worden. In je einem Fall ist ein formaler Fehler behoben (Anführungszeichen im letzten Beispiel) und eine gendergerechte Formulierung eingebaut worden. Erfreulich ist, dass in dieser Angabe nur drei fachliche und ein grammatikalischer Fehler ausgebessert werden musste. Es hat sich aber gezeigt, dass wiederum Schwächen in der Formulierung betreff Funktionen aufgetreten sind.

3.4 Klausurangaben zur schriftlichen Reifeprüfung zum Haupttermin aus dem Schuljahr 2008/2009

Auch hier ist die Angabe eine Klausur[22] eines ORG mit ergänzendem Unterricht in Physik, Chemie und Biologie und Umweltkunde. Die Matura umfasst vier Aufgaben aus den Gebieten Binomialverteilung, Lösen von Gleichungen, Differenzialrechnung und Eigenschaften von Graphen von Funktionen sowie Finden von Funktionsgleichungen.

3.4.1 ursprüngliche Angabe – Beispiel 1

Die Häufigkeiten der Blutgruppen beim Menschen setzen sich wie folgt zusammen:

Blutgruppe	Häufigkeit [%]
A pos.	37
A neg.	6
B pos.	9
B neg.	2
0 pos.	35
0 neg.	6
AB pos.	4
AB neg.	1

a Es werden dringend Spender der Blutgruppe **B pos.** gesucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter **50** nicht getesteten Personen **genau 4** mit dieser Blutgruppe zu finden?

b Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **höchstens 4** geeignete Spender zu finden?

22 online abrufbar unter http://www.matkit.at/dateien/schul/mathematik/matura/matura_aufgaben_8n1_m_2009.pdf (08 05 16)

c Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **mindestens 47** geeignete Spender zu finden?

d Berechne den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

e Wie viele Personen müssen getestet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99,9 Prozent mindestens einen Spender mit Blutgruppe **B pos.** zu finden?

f Überprüfe, ob die obige Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden darf. Vergleiche unabhängig davon den Wert $P(2 \leq X \leq 48)$ der Binomialverteilung mit dem entsprechenden Wert der Normalverteilung. Wie groß ist die Differenz der beiden Werte? Verwende die Stetigkeitskorrektur!

g Welche Zahlenwerte sind als Ergebnisse bei Wahrscheinlichkeitsbeispielen nicht zulässig?

3.4.2 überarbeitet Angabe – Beispiel 1

Die prozentuellen Häufigkeiten der Blutgruppen beim Menschen in Österreich[23] setzen sich wie folgt zusammen:

Blutgruppe	Häufigkeit [%]
A pos.	37
A neg.	6
B pos.	9
B neg.	2
0 pos.	35
0 neg.	6
AB pos.	4
AB neg.	1

a Es werden dringend Spender der Blutgruppe **B pos.** gesucht. Berechnen Sie wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, unter **50** nicht getesteten Personen **genau 4** mit dieser Blutgruppe zu finden.

b Berechnen Sie wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, **höchstens 4** geeignete Spender der Blutgruppe **B pos.** zu finden.

c Berechnen Sie wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, **mindestens 47** geeignete Spender der Blutgruppe **B pos.** zu finden.

d Berechnen Sie den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für die Daten in Beispiel a.

e Berechnen Sie wie viele Personen getestet werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99,9 Prozent mindestens einen Spender mit Blutgruppe **B pos.** zu finden.

f Überprüfen Sie, ob die obige Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden darf. Vergleichen Sie unabhängig davon den Wert $P(2 \leq X \leq 48)$ der Binomialverteilung mit dem entsprechenden Wert der Normalverteilung. Verwenden Sie die Stetigkeitskorrektur! Berechnen Sie die Differenz der beiden Werte?

g Erläutern Sie welche Zahlenwerte als Ergebnisse bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen nicht

23 Quellenangabe wäre in diesem Fall notwendig gewesen.

zulässig sind.

3.4.3 ursprüngliche Angabe – Beispiel 2

Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen über dem Körper der komplexen Zahlen! Führe jeweils eine geeignete Substitution durch!

a $3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 0$

b $x^8 + x^4 - 2 = 0$

c $e^6 \cdot x^{\ln x} = x^7$

d Formuliere den Fundamentalsatz der Algebra! Welche unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten gibt es für eine Gleichung dritten Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten?

3.4.4 überarbeitete Angabe – Beispiel 2

Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichungen über dem Körper der komplexen Zahlen! Führen Sie jeweils eine geeignete Substitution durch!

a $3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 0$

b $x^8 + x^4 - 2 = 0$

c $e^6 \cdot x^{\ln x} = x^7$

d Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra! Erläutern Sie welche unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten es für eine Gleichung dritten Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten gibt!

3.4.5 ursprüngliche Angabe – Beispiel 3

a Gegeben ist die Weg-Zeitfunktion $s(t) = t^2 + 2$! Berechne den zurückgelegten Weg nach $t = 2;3;4;5$ Sekunden! Bestimme die mittlere Geschwindigkeit in den Sekundenintervallen [2;5], [3;5] und [4;5], sowie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 5$ s mittels der Definition des Differenzialquotientens!

b Beschreibe die Bedeutung des Differenzialquotientens im Bezug auf den Graphen einer Funktion. Wie steht das Differenzial mit dem Integral in Verbindung? An welchen Stellen sind Funktionen im Allgemeinen **nicht** differenzierbar? Fertige entsprechende Skizzen an!

c Löse die Differenzialgleichung $y' \cdot x^3 = 2y$ unter der Bedingung, dass die Lösung durch den Punkt P(1/1) geht. Führe die Probe durch. Definiere den Begriff **Differenzialgleichung**! Wie sieht die Lösung einer solchen Gleichung aus und wie unterscheidet sich diese von einer *herkömmlichen* Gleichung?

d Definiere den Begriff der **Asymptote** und bestimme alle Asymptoten der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ und zeichne diese sowie den Graphen der Funktion im Intervall [-3;3]! Bestimme das uneigentliche

Integral $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$!

3.4.6 überarbeitete Angabe – Beispiel 3

a Gegeben ist die Zeit-Weg-Funktion *s* mit der Gleichung $s(t)=t^2+2$ (*t* in Sekunden und *s* in Meter)! Berechnen Sie den zurückgelegten Weg nach $t=2;3;4;5$ Sekunden! Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in den Zeitintervallen [2 s;5 s], [3 s;5 s] und [4 s;5 s], sowie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=5\,\mathrm{s}$ mittels der Definition des Differenzialquotientens!

b Beschreiben Sie die Bedeutung des Differenzialquotientens im Bezug auf den Graphen einer Funktion. Erläutern Sie wie das Differenzial mit dem unbestimmten Integral in Verbindung steht. Erklären Sie bei welchen Argumenten Funktionen im Allgemeinen **nicht** differenzierbar sind. Fertigen Sie entsprechende Skizzen an!

c Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung $y'\cdot x^3=2y$ unter der Bedingung, dass der Graph der Lösungsfunktion durch den Punkt P(1/1) geht. Führen Sie die Probe durch. Definieren Sie den Begriff **Differenzialgleichung** und erläutern Sie diesen! Erklären Sie wie die Lösung einer solchen Gleichung aussieht und wie sich diese von einer *herkömmlichen*[24] Gleichung unterscheidet.

d Definieren Sie den Begriff der **Asymptote** und berechnen Sie die Gleichungen alle Asymptoten der Funktion *f* mit $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ und zeichnen Sie diese sowie den Graphen der Funktion *f* im Intervall [-3;3]! Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$!

3.4.7 ursprüngliche Angabe – Beispiel 4

Ein Richter muss in einem Prozess über die Schuld eines Medikamente nehmenden Autofahrers an einem Unfall entscheiden. Dieser Autofahrer erhielt eine Injektion des Medikamentes von seinem Arzt, die die Wirkstoffkonzentration in seinem Blut auf sieben Milligramm pro Liter anhob. Zwei Tage nach der Injektion kam es zu dem Unfall. Bei einer Kontrolle am folgenden Tag sind noch 3 Milligramm, am nächsten Tag noch 2 Milligramm im Blut. Sollte der Autofahrer **mehr** als 4,2 Milligramm pro Liter Medikamentenkonzentration am Unfalltag im Blut gehabt haben, gilt er als verkehrstüchtig und daher schuldlos.
Drei Gutachter bestimmen durch Interpolation diese gesuchte Konzentration. Der erste interpoliert zwischen den ersten beiden Messpunkten linear, der zweite zwischen denselben Punkten mittels der Funktion $g(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, der dritte durch alle drei Messpunkte mittels $h(x)=p\cdot x^2+q\cdot x+r$.
Welche Interpolationsfunktionen erhalten die Gutachter und welche Medikamentenkonzentration berechnen diese für den Unfalltag? Welche Funktion ergibt eine Verkehrstüchtigkeit und welche der ermittelten Funktionen beschreibt am ehesten den realen Sachverhalt? Wie sollte der Richter entscheiden?

3.4.8 überarbeitete Angabe – Beispiel 4

Ein Richter muss in einem Prozess über die Schuld eines Medikamente nehmenden Autofahrers an

24 Hier sind jene Gleichungen gemeint, die eine Zahl oder mehrere Zahlen als Lösungen besitzen, im Gegensatz zur Lösungsfunktion einer Differentialgleichung. Dieser Sachverhalt war den SchülerInnen bekannt.

einem Unfall entscheiden. Dieser Autofahrer erhielt eine Injektion des Medikamentes von seinem Arzt, welche die Wirkstoffkonzentration in seinem Blut auf sieben Milligramm pro Liter anhob. Zwei Tage nach der Injektion kam es zu dem Unfall. Bei einer Kontrolle an dem Unfall folgenden Tag sind noch 3 Milligramm, am darauffolgenden Tag noch 2 Milligramm im Blut. Sollte der Autofahrer **mehr** als 4,2 Milligramm pro Liter Medikamentenkonzentration am Unfalltag im Blut gehabt haben, gilt er als verkehrstüchtig und daher schuldlos.
Drei Gutachter bestimmen durch Interpolation diese gesuchte Konzentration. Der erste interpoliert zwischen den ersten beiden Messpunkten linear, der zweite zwischen denselben Punkten mittels der Funktion g mit $g(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, der dritte durch alle drei Messpunkte mittels der Funktion h mit $h(x)=p\cdot x^2+q\cdot x+r$. Berechnen Sie welche Interpolationsfunktionen die Gutachter erhalten und welche Medikamentenkonzentration in Milligramm diese für den Unfalltag liefern? Welche Funktion ergibt eine Verkehrstüchtigkeit und welche der ermittelten Funktionen beschreibt am ehesten den realen Sachverhalt? Erläutern Sie wie der Richter entscheiden sollte?

3.4.9 Diskussion

Die Angabe für diese Klausur beinhaltet 8 fachliche Fehler, die alle zum Thema Funktionen gehören und auch in den voraus gegangenen Klausuren in dieser Art aufgetreten sind. 15 sprachliche Verbesserungen habe ich durchgeführt, darüber hinaus 27 Anpassungen, um dem BIFIE-Standard zu entsprechen. Bei Beispiel 1 wäre eine Quellenangabe bezüglich der verwendeten Daten aus wissenschaftlicher Sicht notwendig gewesen.

3.5 Klausuraufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung zum Haupttermin aus dem Schuljahr 2010/2011

Diese Klausur[25] betraf eine Klasse mit einem gymnasialen und einem wirtschaftskundlich-realgymnasialem Teil. Sie besteht aus vier Beispielen aus den Bereichen Trigonometrie, Lösen von Gleichungen, Binomialverteilung und Statistik sowie Finden von Funktionsgleichungen und deren Eigenschaften.

3.5.1 ursprüngliche Angabe – Beispiel 1

Von der 450 Meter über dem Meeresspiegel liegenden Donauwarte am Braunsdorfer Berg sieht man das Brückenende am linken Donauufer der Eisenbahnbrücke bei Krems unter dem Tiefenwinkel $\alpha=5{,}88°$. Nachdem man sich um den Horizontalwinkel $\phi=15{,}52°$ gedreht hat, erblickt man das andere Brückenende am rechten Donauufer unter dem Tiefenwinkel $\beta=5{,}23°$. Die beiden Brückenenden liegen jeweils 203 Meter über dem Meeresspiegel.

a Berechne die Länge der Eisenbahnbrücke! Fertige eine Skizze an!

b Wie breit ist an der Brückenstelle die Donau, wenn die Eisenbahnbrücke rund 450 Meter festen Boden überbrückt? Wie viele Sekunden braucht ein Triebwagen über die Brücke, wenn dieser mit 70 km/h unterwegs ist?

c Nenne vier Zusammenhänge, die in einem **rechtwinkeligen** Dreieck verwendet werden können, um Seiten beziehungsweise Winkel zu berechnen.

25 online abrufbar unter http://www.matkit.at/dateien/schul/mathematik/matura/matura_aufgaben_8agwk_m_2011.pdf (08 05 16)

3.5.2 überarbeitete Angabe – Beispiel 2

Von der 450 Meter über dem Meeresspiegel liegenden Donauwarte am Braunsdorfer Berg sieht man das Brückenende am linken Donauufer der Eisenbahnbrücke bei Krems unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 5{,}88°$. Nachdem man sich um den Horizontalwinkel $\phi = 15{,}52°$ gedreht hat, erblickt man das andere Brückenende am rechten Donauufer unter dem Tiefenwinkel $\beta = 5{,}23°$. Die beiden Brückenenden liegen jeweils 203 Meter über dem Meeresspiegel.

a Berechnen Sie die Länge der Eisenbahnbrücke! Fertigen Sie eine Skizze an!

b Berechnen Sie wie breit die Donau an der Brückenstelle ist, wenn die Eisenbahnbrücke rund 450 Meter festen Boden überbrückt. Berechnen Sie wie viele Sekunden ein Triebwagen über die Brücke braucht, wenn dieser mit 70 km/h unterwegs ist?

c Nennen Sie vier mathematische Zusammenhänge, die in einem **rechtwinkeligen** Dreieck verwendet werden können, um Seiten beziehungsweise Winkel zu berechnen.

3.5.3 ursprüngliche Angabe – Beispiel 3

Die Häufigkeiten ausgewählter Altersgruppen in der Stadt Krems[26] setzen sich wie folgt zusammen:

Alter [Jahre]	Häufigkeit [%]
$0-6$	4,36
$7-15$	6,99
$16-18$	2,80
$19-40$	31,47
$41-65$	35,31
$\geqslant 66$	19,03

a Für eine Umfrage zum Thema Arbeitslosigkeit werden Personen in einem Alter zwischen 19 und 40 Jahren gesucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter **50** zufällig auf der Straße ausgewählten Personen **genau 13** in dieser Altersgruppe zu finden?

b Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **mindestens eine** Person der gesuchten Altersgruppe zu finden?

c Wie viele Personen müssen befragt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 Prozent mindestens eine Person im gesuchten Alter zu finden?

d Berechne den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung!

e Die obige Binomialverteilung darf durch die Normalverteilung approximiert werden, da $\sigma > 3$ gilt. Berechne die Wahrscheinlichkeit mittels Normalverteilung **zwischen 12 und 20 Personen** im geeigneten Alter zu finden! Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit der Normalverteilung **mehr als 25 Personen** zu finden?

26 entnommen aus *Krems in Zahlen 2010*, Herausgeber: Magistrat der Stadt Krems; eigene Berechnung

f Kurz nach der Umfrage erscheint in einer Tageszeitung unten stehende Grafik[27]. Welche **vier** großen *Fehler* in mathematischer Hinsicht haben die Ersteller der Grafik begangen? Fertige ein mathematisch korrektes Diagramm mit folgenden Daten an:

Jahr	**Anzahl Arbeitslose**[28]
2004	siehe Grafik
2005	siehe Grafik
2006	214.606
2007	204.840
2008	siehe Grafik
2009	siehe Grafik
2010	siehe Grafik

g Nenne vier weitere Möglichkeiten, Grafiken beziehungsweise Diagramme zu manipulieren!

3.5.4 überarbeitete Angabe – Beispiel 3

Die prozentuellen Häufigkeiten ausgewählter Altersgruppen in der Stadt Krems[29] setzen sich wie folgt zusammen:

Alter [Jahre]	Häufigkeit [%]
0 – 6	4,36
7 – 15	6,99
16 – 18	2,80
19 – 40	31,47
41 – 65	35,31
⩾66	19,03

a Für eine Umfrage zum Thema Arbeitslosigkeit werden Personen in einem Alter zwischen 19 und 40 Jahren gesucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit unter **50** zufällig auf der Straße ausgewählten Personen **genau 13** in dieser Altersgruppe zu finden.

b Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit **mindestens eine** Person der gesuchten Altersgruppe zu finden.

c Berechnen Sie wie viele Personen müssen befragt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 Prozent mindestens eine Person im gesuchten Alter zu finden.

d Berechnen Sie den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für die Daten in Beispiel a!

e Die obige Binomialverteilung darf durch die Normalverteilung approximiert werden, da $\sigma > 3$

27 entnommen von http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/606675/Arbeitsmarkt_Staerkster-Rueckgang-der-Arbeitslosigkeit (10 02 11)
28 fehlende Daten von http://www.ams.or.at (11 02 11)
29 entnommen aus *Krems in Zahlen 2010*, Herausgeber: Magistrat der Stadt Krems; eigene Berechnung

gilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mittels Normalverteilung **zwischen 12 und 20 Personen** im geeigneten Alter zu finden! Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Normalverteilung **mehr als 25 Personen** zu finden.

f Kurz nach der Umfrage erscheint in einer Tageszeitung unten stehende Grafik[30]. Welche **vier** großen *Fehler* in mathematischer Hinsicht haben die Ersteller der Grafik begangen? Fertigen Sie ein mathematisch korrektes Diagramm mit folgenden Daten an:

Jahr	Anzahl Arbeitslose[31]
2004	siehe Grafik
2005	siehe Grafik
2006	214.606
2007	204.840
2008	siehe Grafik
2009	siehe Grafik
2010	siehe Grafik

g Nennen Sie vier weitere Möglichkeiten, Grafiken beziehungsweise Diagramme zu manipulieren!

3.5.5 ursprüngliche Angabe – Beispiel 4

Am 14 01 11 gab es am BG Rechte Kremszeile um 11:30 Uhr Hochwasseralarm. Der Wasserstand der Donau bei Kienstock war in wenigen Stunden sehr stark angestiegen (siehe Grafik[32] rechts). Die Voraussage der Wasserstandshöhe ab diesem Zeitpunkt war für den Hochwasserschutz äußerst wichtig.

a Zeige, dass eine durch unten gegebene Messpunkte gefittete quadratische Funktion $h(t)=a\cdot t^2+b\cdot t+c$ das Ergebnis $h(t)=-0{,}00512\cdot t^2+0{,}12849\cdot t+7{,}00000$ liefert. Die Koeffizienten sind dabei auf fünf Nachkommastellen gerundet.

Datum, Uhrzeit [dd.mm, hh:mm]	Wasserhöhe [m]
14.01, 00:00	7,00
14.01, 08:00	7,70
14.01, 11:30	7,80

b Verwende die Funktion $h(t)$, um zu berechnen, wann laut dieser Funktion die Donau ihren Wasserhöchststand an der Messstelle Kienstock erreicht hat.

c Wie hoch war der Wasserstand bei Kienstock laut Voraussage am 14.01.2011 um 19:00 Uhr

30 entnommen von http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/606675/Arbeitsmarkt_Staerkster-Rueckgang-der_Arbeitslosigkeit (10 02 11)
31 fehlende Daten von http://www.ams.or.at (11 02 11)
32 entnommen von http://www.noel.gv.at/Externeseiten/wasserstand/wiskiwebpublic/stat_6368255.htm?entryparakey=W#W (14 01 11)

beziehungsweise am 15.01.2011 um 02:00 Uhr?

d Nimmt man einen trapezförmigen Querschnitt der Donau an, gibt die Funktion $\Phi(t)=\frac{a+c}{2}\cdot v\cdot\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,\mathrm{d}t$ die Durchflussmenge in Kubikmeter Wasser an. Berechne wie viele Kubikmeter Wasser am 14.01.2011 an der Messstelle Kienstock vorbeigeflossen sind! Die entsprechenden Werte lauten:

$a\ldots\text{Donauoberflächen-Breite}=300\,\text{m}$
$c\ldots\text{Donaugrund-Breite}=100\,\text{m}$
$v\ldots\text{angenommene Donau-Fließgeschwindigkeit}=2{,}5\,\text{km/h}$

e Definiere die Begriffe **Parameter** und **Variable**! Benenne Parameter und Variablen in der Funktion $\Phi(t)$.

f Was gibt das Integral in der Funktion $\Phi(t)$ an?

3.5.6 überarbeitete Angabe – Beispiel 4

Am 14 01 11 gab es am BG Rechte Kremszeile um 11:30 Uhr Hochwasseralarm. Der Wasserstand der Donau bei Kienstock war in wenigen Stunden sehr stark angestiegen (siehe Grafik[33] rechts). Die Voraussage der Wasserstandshöhe ab diesem Zeitpunkt war für den Hochwasserschutz äußerst wichtig.

a Zeigen Sie, dass eine durch unten gegebene Messpunkte gefittete quadratische Funktion h mit $h(t)=a\cdot t^2+b\cdot t+c$ den Term $h(t)=-0{,}00512\cdot t^2+0{,}12849\cdot t+7{,}00000$ liefert. Die Koeffizienten sind dabei auf fünf Nachkommastellen gerundet.

Datum, Uhrzeit [dd.mm, hh:mm]	Wasserhöhe [m]
14.01, 00:00	7,00
14.01, 08:00	7,70
14.01, 11:30	7,80

b Verwenden Sie die Funktion h, um zu berechnen, wann laut dieser Funktion die Donau ihren Wasserhöchststand an der Messstelle Kienstock erreicht hat.

c Berechnen Sie die Höhe des Wasserstandes bei Kienstock laut Voraussage am 14.01.2011 um 19:00 Uhr beziehungsweise am 15.01.2011 um 02:00 Uhr.

d Nimmt man einen trapezförmigen Querschnitt der Donau an, gibt die Funktion Φ mit $\Phi(t)=\frac{a+c}{2}\cdot v\cdot\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,\mathrm{d}t$ die Durchflussmenge in Kubikmeter Wasser an. Berechnen Sie wie viele Kubikmeter Wasser am 14.01.2011 an der Messstelle Kienstock vorbeigeflossen sind! Die entsprechenden Werte lauten:

$a\ldots\text{Donauoberflächen-Breite}=300\,\text{m}$
$c\ldots\text{Donaugrund-Breite}=100\,\text{m}$

33 entnommen von http://www.noel.gv.at/Externeseiten/wasserstand/wiskiwebpublic/stat_6368255.htm?entryparakey=W#W (14 01 11)

$v \ldots$ angenommene Donau-Fließgeschwindigkeit $= 2{,}5\,\text{km/h}$

e Definieren Sie die Begriffe **Parameter** und **Variable**! Benennen Sie Parameter und Variablen in der Funktion Φ.

f Erläutern Sie was das Integral in der Funktion Φ angibt.

3.5.7 Diskussion

Bei dieser Klausur treten fünf fachliche Fehler auf, wobei einer dreimalig wiederholt wurde. Vier sprachliche Mängel konnten behoben und 21 Änderungen in Richtung BIFIE-Formulierungen durchgeführt werden.

3.6 Klausuraufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung zum Haupttermin aus dem Schuljahr 2013/2014

Diese Klausur[34] habe ich für eine Klasse eines wirtschaftskundlich-realgymnasialen Zweiges zusammengestellt. Diese enthält im Gegensatz zu den vorherigen Maturaaufgaben Multiple-Choice-Aufgabe, weil für diesen Jahrgang ursprünglich die zentrale schriftliche Reifeprüfung geplant war. Aus diesem Grund differieren die Aufgaben dieser Klausur zu den anderen. Sie besteht aus fünf Aufgaben aus den Themengebieten Polynomfunktionen dritten Grades, Gleichungen, Kosten- und Preistheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung (besonders Binomialverteilung) und (nicht lineare analytische) Geometrie. Diese Aufgaben sind auch so bezeichnet und zusammen gefasst sowie in Richtung Kompetenzorientierung erarbeitet worden.

3.6.1 ursprüngliche Angabe – Beispiel 1

a Splines werden allgemeine Polynomfunktionen dritten Grades genannt, die an einem bestimmten Punkt stetig aneinander gefügt werden. Für den Kontaktpunkt gilt Folgendes: Funktionswert, Steigung und Krümmung sind für beide Splines ident.
Gegeben ist die Splinefunktion $s_1(x)=2\cdot x^3+x^2-x+1$, die an der Stelle $x=-0{,}5$ an die Splinefunktion $s_2(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ angefügt werden soll, deren Graph durch den Punkt $\mathrm{P}(-2/2)$ geht.
Geben Sie das notwendige Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten von s_2 an und ermitteln Sie diese!
Schreiben Sie die gesuchte Funktion an: $s_2(x)=$

b Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades: $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3+b\cdot x^2+c$

Zeigen Sie, dass für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f Folgendes gilt: $\mathrm{W}(-2\cdot b/y)$!

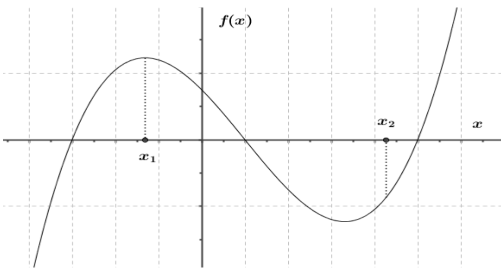
c Bestimmen Sie **händisch**[35] das Integral von $f(x)=x^3-3\cdot x^2-18\cdot x$ zwischen den Grenzen -3 und 0. Wie wird diese Art des Integrales genannt? Nennen Sie eine mögliche Interpretation des Ergebnisses. Bestimmen Sie die Differenz des oben berechneten Integrals zu der Obersummen- sowie Untersummenberechnung mit jeweils 10 Rechtecken.

34 online unter http://www.matkit.at/dateien/schul/mathematik/matura/matura_aufgaben_8bs_m_2014.pdf (11 05 16)
35 Das Wort händisch ist ein Schlüsselwort für SchülerInnen alle Zwischenschritte bei der Berechnung anzugeben.

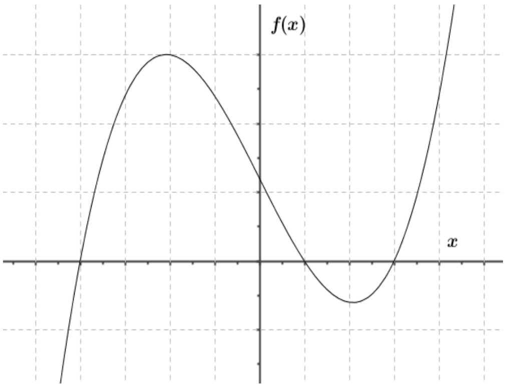
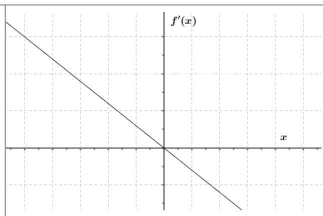
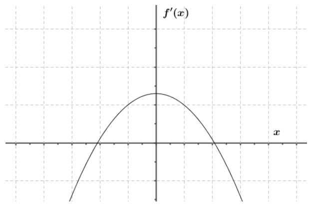
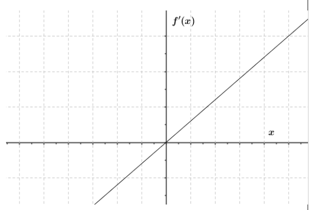
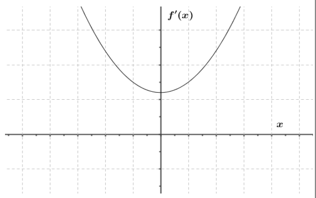
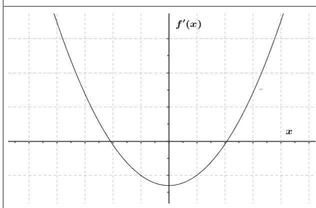
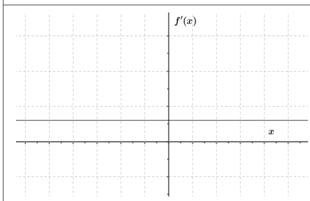
d

Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion p dritten Grades.		$p(x)$ besitzt maximal 3 Nullstellen	☐
		$p(x)$ besitzt zwei Hochpunkte	☐
		$p(x)$ kann zwei Sattelpunkte besitzen	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die Funktion p gelten können.		$p(x)$ besitzt genau einen Wendepunkt	☐
		$p(x)$ besitzt eine senkrechte Asymptote	☐

e

Gegeben ist unten stehender Graph der Funktion f . 		$f'(x_1)$ ______ $f'(x_2)$
		$f''(x_1)$ ______ $f''(x_2)$
Aufgabenstellung: Ergänzen Sie folgende Aussagen über die erste und zweite Ableitung an den Stellen x_1 und x_2 mit „<“, „>“ , „< 0“ oder „> 0“.		$f'(x_2)$ ______
		$f''(x_1)$ ______

f

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Gegeben ist der Graph der Funktion f .

</td>
<td rowspan="6"></td>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Aufgabenstellung:
Ordnen Sie dem gegebenen Graphen der Funktion f den korrekten Graphen der Ableitungsfunktion f' zu!</td>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>☐</td>
</tr>
</table>

3.6.2 überarbeitete Angabe – Beispiel 1

a Splines werden allgemeine Polynomfunktionen dritten Grades genannt, die an einem bestimmten Punkt stetig aneinander gefügt werden. Für den Kontaktpunkt gilt Folgendes: Funktionswert,

Steigung und Krümmung sind für beide Splines ident.
Gegeben ist die Splinefunktion s_1 mit $s_1(x)=2\cdot x^3+x^2-x+1$, die an der Stelle $x=-0{,}5$ an die Splinefunktion s_2 mit $s_2(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ angefügt werden soll, deren Graph durch den Punkt $\mathrm{P}(-2/2)$ geht.
Geben Sie das notwendige Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten von s_2 an und ermitteln Sie diese!
Schreiben Sie die gesuchte Funktionsgleichung an: $s_2(x)=$

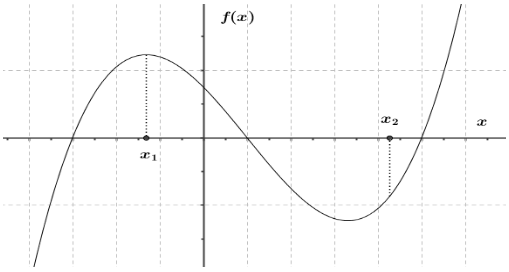
b Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3+b\cdot x^2+c$
Zeigen Sie, dass für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f Folgendes gilt: $\mathrm{W}(-2\cdot b/y)$!

c Bestimmen Sie **händisch** das Integral von $f(x)=x^3-3\cdot x^2-18\cdot x$ zwischen den Grenzen -3 und 0. Erläutern Sie wie diese Art des Integrales genannt wird? Nennen Sie eine mögliche Interpretation des Ergebnisses. Berechnen Sie die Differenz des oben berechneten Integrals zu der Obersummen- sowie Untersummenberechnung mit jeweils 10 Rechtecken.

d

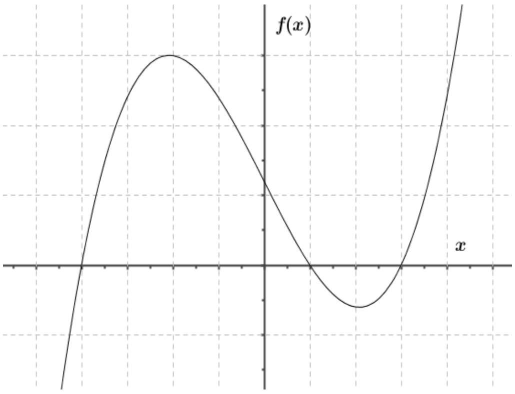
Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion p dritten Grades.		der Graph von p besitzt maximal 3 Nullstellen	☐
		der Graph von p besitzt zwei Hochpunkte	☐
		der Graph von p kann zwei Sattelpunkte besitzen	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die Funktion p gelten können.		der Graph von p besitzt genau einen Wendepunkt	☐
		der Graph von p besitzt eine senkrechte Asymptote	☐

e

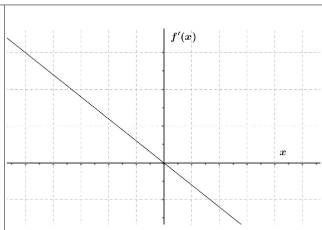
Gegeben ist unten stehender Graph der Funktion f. 		$f'(x_1)$ ____ $f'(x_2)$
		$f''(x_1)$ ____ $f''(x_2)$
Aufgabenstellung: Ergänzen Sie folgende Aussagen über die erste und zweite Ableitung an den Stellen x_1 und x_2 mit „<“, „>“ , „< 0“ oder „> 0“.		$f'(x_2)$ ____
		$f''(x_1)$ ____

f

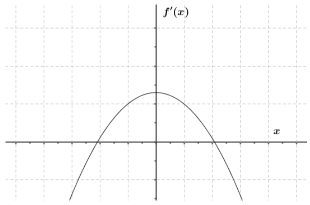
Gegeben ist der Graph der Funktion f .



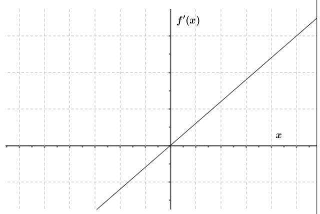
Aufgabenstellung:
Ordnen Sie dem gegebenen Graphen der Funktion f den korrekten Graphen der Ableitungsfunktion f' zu!



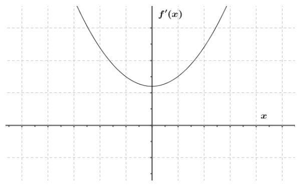
☐



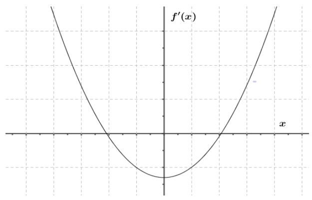
☐



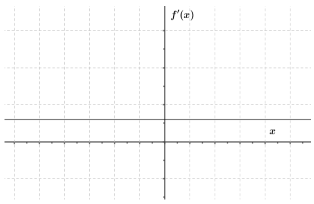
☐



☐



☐



☐

3.6.3 ursprüngliche Angabe – Beispiel 2

a Berechnen Sie **händisch** die Lösungen der symmetrischen Gleichung $13 \cdot x^4 + 170 \cdot x^3 + 26 \cdot x^2 + 170 \cdot x + 13 = 0$ mittels einer geeigneten Substitution.

b Berechnen Sie **händisch** die Lösung der Wurzelgleichung $\sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{6x+1}$. Geben Sie die Definitionsmenge an und führen Sie **händisch** die Probe durch.

c Bestimmen Sie **händisch** die Lösung der Differentialgleichung (DGLG) $y' = x \cdot y$ mit der Anfangsbedingung $P(0/1)$.
Wieso ist eine unbekannte Konstante Teil der allgemeinen Lösung einer DGLG und wie viele Lösungen besitzt eine Differentialgleichung ohne Anfangsbedingung? Welcher Unterschied besteht in der Lösung einer DGLG im Gegensatz zur Lösung der anderen Gleichungen dieses Beispiels?

3.6.4 überarbeitete Angabe – Beispiel 2

a Berechnen Sie **händisch** die Lösungen der symmetrischen Gleichung $13 \cdot x^4 + 170 \cdot x^3 + 26 \cdot x^2 + 170 \cdot x + 13 = 0$ mittels einer geeigneten Substitution.

b Berechnen Sie **händisch** die Lösung der Wurzelgleichung $\sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{6x+1}$. Geben Sie die Definitionsmenge an und führen Sie **händisch** die Probe durch.

c Bestimmen Sie **händisch** die Lösung der Differentialgleichung (DGLG) $y' = x \cdot y$ mit der Anfangsbedingung $P(0/1)$.
Erläutern Sie wieso eine unbekannte Konstante Teil der allgemeinen Lösung einer DGLG ist und wie viele Lösungen eine Differentialgleichung ohne Anfangsbedingung besitzt? Erklären Sie welcher Unterschied in der Lösung einer DGLG im Gegensatz zur Lösung der anderen Gleichungen dieses Beispiels besteht?

3.6.5 ursprüngliche Angabe – Beispiel 3

Die Häufigkeit der Ansetzung an einem bestimmten Spielort in den letzten fünf Saisonen eines Ihnen bekannten Basketballschiedsrichters ist in unten stehender Tabelle angegeben.

Spielort	**Häufigkeit [%]**
Fürstenfeld	8,91
Gmunden	12,87
Graz	11,88
Klosterneuburg	12,87
Oberwart	7,92
St. Pölten	9,90
Wels	7,92
anderer	27,73

a Angenommen die Ansetzungen erfolgen zufällig, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei den nächsten 100 Ansetzungen genau 10, 11, 12, 13 oder 14 Mal in **Klosterneuburg** eingesetzt zu werden (berechnen Sie einen der Werte **händisch**)? Zeichnen Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die ermittelten Werte!

b Wie viele Ansetzungen müssten theoretisch abgewartet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99,9 Prozent in **Klosterneuburg** eingesetzt zu werden? Berechnen Sie **händisch**!

c Begründen Sie warum obige Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden darf! Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit **zwischen 8 und 13 Mal** in Klosterneuburg zu pfeifen, und zwar ein Mal mit der Binomialverteilung, und je ein Mal mit der Normalverteilung mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

3.6.6 überarbeitete Angabe – Beispiel 3

Die prozentuellen Häufigkeit der Ansetzung an einem bestimmten Spielort in den letzten fünf Saisonen eines Ihnen bekannten Basketballschiedsrichters ist in unten stehender Tabelle angegeben.

Spielort	Häufigkeit [%]
Fürstenfeld	8,91
Gmunden	12,87
Graz	11,88
Klosterneuburg	12,87
Oberwart	7,92
St. Pölten	9,90
Wels	7,92
anderer	27,73

a Angenommen die Ansetzungen erfolgen zufällig, berechnen Sie **händisch** wie groß die Wahrscheinlichkeit ist bei den nächsten 100 Ansetzungen genau 10, 11, 12, 13 beziehungsweise 14 Mal in **Klosterneuburg** eingesetzt zu werden. Zeichnen Sie ein Wahrscheinlichkeitsfunktionsdiagramm für die ermittelten Werte!

b Berechnen Sie **händisch** wie viele Ansetzungen theoretisch abgewartet werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99,9 Prozent in **Klosterneuburg** eingesetzt zu werden.

c Begründen Sie warum obige Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden darf! Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit **zwischen 8 und 13 Mal** in Klosterneuburg zu pfeifen, und zwar ein Mal mit der Binomialverteilung, und je ein Mal mit der Normalverteilung mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

3.6.7 ursprüngliche Angabe – Beispiel 4

Eine Firma führt Aufzeichnungen über die Kosten (in Geldeinheiten GE) ihrer Produktion (in Mengeneinheiten ME). Folgende Werte wurden in einer Tabelle zusammen gefasst.

produzierte ME	Kosten in GE
100	10.500
200	18.000
300	27.000
450	44.000

a Bestimmen Sie eine Kosten-Polynomfunktion dritten Grades (Koeffizienten mit 10 Nachkommastellen), die diese Daten am besten fittet.

$K(x)=$

b Ermitteln Sie $K(0)$ und erläutern Sie in eigenen Worten und an Hand eines Beispieles wofür dieser Wert im gegebenen Kontext steht.

$K(0)=$

c Geben Sie an, wie die Gewinnfunktion $G(x)$ definiert ist und bestimmen Sie jenes Intervall der Mengeneinheiten, in dem es zu einem Gewinn für die Firma kommt, wenn pro erzeugte ME 100 GE eingenommen werden.

$I=[\qquad ; \qquad]$

d bestimmen Sie das Betriebsmaximum und den entsprechenden Gewinn bei der ermittelten ME.

e Geben Sie die Grenzkosten für eine produzierte Menge von 400 Stück an!

produzierte Stück	**Grenzkosten**
400	GE

f

Gegeben ist eine Gewinnfunktion $G(x)$, eine Kostenfunktion $K(x)$ und eine Erlösfunktion $E(x)$.		$K''(x)=0$	☐
		$K'(x)=E(x)$	☐
		$K(x)=0$	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jenen Ausdruck an, der angibt, ab wann sich der Anstieg der möglichen Kosten $K(x)$ zu verlangsamen beginnt.		$G'(x)=K'(x)$	☐
		$K'(x)=0$	☐
		$K'(x)=E'(x)$	☐

3.6.8 überarbeitete Angabe – Beispiel 4

Eine Firma führt Aufzeichnungen über die Kosten (in Geldeinheiten GE) ihrer Produktion (in Mengeneinheiten ME). Folgende Werte wurden in einer Tabelle zusammen gefasst.

produzierte ME	**Kosten in GE**
100	10.500
200	18.000
300	27.000
450	44.000

a Bestimmen Sie eine Kosten-Polynomfunktion K dritten Grades (Koeffizienten mit 10 Nachkommastellen), die diese Daten am besten fittet.

$K(x) =$

b Ermitteln Sie $K(0)$ und erläutern Sie in eigenen Worten und an Hand eines Beispieles wofür dieser Wert im gegebenen Kontext steht.

$K(0) =$

c Geben Sie an, wie die Gewinnfunktion G definiert ist und bestimmen Sie jenes Intervall der Mengeneinheiten, in dem es zu einem Gewinn für die Firma kommt, wenn pro erzeugte ME 100 GE eingenommen werden.

$I = [\qquad ; \qquad]$

d Berechnen Sie das Betriebsmaximum und den entsprechenden Gewinn bei der ermittelten ME.

e Geben Sie die Grenzkosten für eine produzierte Menge von 400 Stück an!

produzierte Stück	**Grenzkosten**
400	GE

f

Gegeben ist eine Gewinnfunktion G, eine Kostenfunktion K und eine Erlösfunktion E		$K''(x)=0$	☐
		$K'(x)=E(x)$	☐
		$K(x)=0$	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jenen Ausdruck an, der angibt, ab wann sich der Anstieg der möglichen Kosten K zu verlangsamen beginnt.		$G'(x)=K'(x)$	☐
		$K'(x)=0$	☐
		$K'(x)=E'(x)$	☐

3.6.9 ursprüngliche Angabe – Beispiel 5

a Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des gegeben Kreise k: $x^2+y^2-10\cdot x-4\cdot y=-11$ und berechnen Sie **händisch** die Steigung im Punkt $P(8/-1)$ mittels impliziter Differentation.

b Leiten Sie die Volumsformel $V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}$ für einen Drehkegel her und erläutern Sie in eigenen Worten, warum bei diesem *spitzen* Körper der Faktor $\frac{1}{3}$ in dieser Formel vorkommt. Fertigen Sie eine Skizze an!

c

Gegeben sind folgende Vektoren sind gegeben: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$		$\vec{c}$ ist das Vielfache eines der anderen Vektoren	☐
		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal	☐
		$\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die gegeben Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ korrekt sind!		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel	☐
		$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal	☐

d Gegeben sind vier Kegelschnittgleichungen!
Aufgabenstellung: Ordnen Sie diesen Gleichungen die Bezeichnungen der entsprechenden Kegelschnitte zu.

$3x^2-3y^2=16$			**A**	Kreis
$3x^2+16y^2=3$			**B**	Ellipse
$3x^2+3y^2=16$			**C**	Hyperbel
$3x^2=16y$			**D**	Parabel

3.6.10 überarbeitete Angabe – Beispiel 5

a Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und die Länge des Radius des gegeben Kreises mit der Gleichung $k\colon\ x^2+y^2-10\cdot x-4\cdot y=-11$ und berechnen Sie **händisch** die Steigung im Punkt $P(8/-1)$ mittels impliziter Differentation.

b Leiten Sie die Volumsformel $V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}$ für einen Drehkegel her und erläutern Sie in eigenen Worten, warum bei diesem *spitzen* Körper der Faktor $\frac{1}{3}$ in dieser Formel vorkommt. Fertigen Sie eine Skizze an!

c

Gegeben sind folgende Vektoren:[36] $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$		$\vec{c}$ ist das Vielfache eines der anderen Vektoren	☐
		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal	☐
		$\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert$	☐
Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene zwei Aussagen an, die für die gegeben Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ korrekt sind!		$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel	☐
		$\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind orthogonal	☐

d Gegeben sind vier Kegelschnittgleichungen!
Aufgabenstellung: Ordnen Sie diesen Gleichungen die Bezeichnungen der entsprechenden Kegelschnitte zu.

$3x^2-3y^2=16$			**A**	Kreis
$3x^2+16y^2=3$			**B**	Ellipse
$3x^2+3y^2=16$			**C**	Hyperbel
$3x^2=16y$			**D**	Parabel

3.6.11 Diskussion

Bei dieser Klausur habe ich fünf fachliche Fehler begangen (wobei sich einer fünf Mal, ein weiterer vier Mal wiederholt). Wieder stammen alle aus dem Bereich Funktionen. Ein Rechtschreibfehler und eine unzulässige Wiederholung finden sich auch in den Angaben. Im Gegensatz dazu waren nur vier sprachliche Verbesserungen und lediglich acht Änderungen zu BIFIE-Formulierungen notwendig.

3.7 Gesamtdiskussion

Im Gesamtverlauf der Überarbeitung aller der hier präsentierten Maturaaufgaben lassen sich Fehler fachlicher und sprachlicher Art finden. Besonders im Bereich Funktionen und deren Beschreibung gibt es gravierende Mängel, die sich über alle Arbeiten hinzieht. In den anderen Bereichen ist sind die Fehler in fachlicher Hinsicht nicht besonders auffällig.

Die sprachliche Sicherheit in der Aufgabenformulierung nimmt mit meiner Dienstzeit zu und ist in der letzten gestellten Klausur aus heutiger Sicht für mich zufriedenstellend.

Die Aufgaben sind jetzt aus meiner Sicht fachlich korrekt, sprachlich sinnvoll und verständlich, sowie kompetenzorientiert formuliert, sodass diese aus diesem Portfolio direkt in den Unterricht übernommen werden können, wenn dies gewünscht ist. Da es sich aber um *alte* Aufgaben handelt, liegt der Schwerpunkt auf dem Operieren. Dies hat sich im Laufe der Zeit ebenfalls verändert. Stand am Anfang das Ausrechnen im Mittelpunkt der Aufgaben hat sich zum Ende des Zeitraumes diese doch etwas Richtung Interpretieren und Erläutern verschoben.

36 Löschung des doppelten Wortlautes.

4 Literaturverzeichnis

[1] Apolin M., *MACH DAS! DIE ULTIMATIVE PHYSIK DES ABNEHMENS*, ecowin, 2014, Salzburg

[2] BIFIE, *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*, online unter https://www.bifie.at/node/1442 (07 05 16)

[3] Busse A., *Umgang Jugendlicher mit dem Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben*, Franzbecker, 2009, Hildesheim, Berlin

[4] Cottone E., **Byrd-Bredbenner C.**, *Knowledge and Psychosocial Effects of the Film* Super Size Me *on Young Addults*, Journal of the American dietetic Association, 107, 7, 2007

[5] Deutsches Bildungsressort, Bereich Innovation und Beratung – Unterricht – Mathematik, *Mathematik-Modellierungswoche*, online unter http://www.bildung.suedtirol.it/unterricht/mathematik/initiativen/mathematik-modellierungswoche/ (15 04 16)

[6] Fisher J., **Kral T.**, *Super-size me: Portion size effects on young childrens's eating*, Physiology & Behaviour 94, 2008

[7] Greefrath G., *Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit und ohne digitaler Werkzeuge*, online unter https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/idm/greefrath.pdf *(15 04 16)*

[8] Harris J., **Benedict F.**, *A biometric study of human basal metabolism*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 4, 12, 1918

[9] Keeling S., Einführende Mathematische Modellierung, online unter http://mathematik.oehunigraz.at/files/2014/07/modein.pdf (15 04 16)

[10] Keeling S., *Fortgeschrittene Mathematische Modellierung*, online unter http://ww.uni-graz.at/imawww/keeling/modII_ss14/modadv.pdf (15 04 16)

[11] Leinbach P., **Leinbach C.**, *Die Formel von Sherlock Holmes*, übersetzt von Böhm J., online unter http://ww.acdca.ac.at/material/allgem/leinbach_holmes.pdf (15 04 16)

[12] Maaß J., *Schreibweisen für Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS*, online unter https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_m_schreibweisen_2013-10-09.pdf (07 05 16)

[13] Mifflin M. et al., *A new predictive equation for resting energy expenditure in healthy individuals*, The American Journal of Clinical Nutrition, 51, 1990

[14] Illini West High School, *Super Size Me: The facts from the film*, online unter http://www.illiniwest.org/pages/uploaded_files/Super Size Me Facts Sheet.docx (03 0 16)

[15] Kino macht Schule, *Super Size Me*, 2014, online unter http://www.kinomachtschule.at/filme/supersizeme.html (03 04 16)

[16] o. A., *Voraussage für den Film* Supersize Me, online unter http://www.uni-graz.at/imawww/keeling/idr_ws10/supersize.pdf (15 04 16)

[17] Roza A., **Shizgal H.**, *The Harris Benedict equation reevaluated: resting energy requirements and the body cell mass*, The American Journal of Clinical Nutrition, 40, 1984

[18] Super size me, Regie: Morgan Spurlock, Drehbuch: Morgan Spurlock, USA, 2004, DVD, 120 Minuten

[19] Strempel T., *Richtig Mathematisch Modellieren!*, online unter http://www.bfmathematik.de/wp-content/uploads/2015/08/Strempel-20140121Defizite20140408A5.pdf (15 04 16)

[20] Technische Universität Kaiserslautern, Felix-Klein-Modellierungswochen, online unter http://komms.uni-kl.de/schulprojekte/kurzprojekte/modellierungswochen/ (15 04 16)

[21] Töglhofer J., *Fast Food, Fett und die Folgen*, Ö1 macht Schule, online unter http://oe1.orf.at/static/pdf/21_Aktivit__ten.pdf (03 04 16)

[22] Waldenberger F., *Tabelle Kalorienverbrauch bei körperlicher Tätigkeit*, online unter http://www.herz.at/meinlebensstil/Lifestyle/Tabelle_Kalorienverbrauch_bei_koerperlicher_Taetigkeit.htm (15 04 16)