

Die Energiegewinnung in Sternen ähnlich unserer Sonne, basiert auf der Proton-Proton-Kette (pp-Kette). Bei diesem Vorgang gibt es mehrere Zweige. Die folgenden Berechnungen gelten nur für jenen Zweig, der am häufigsten vorkommt und zur höchsten Energieabstrahlung führt.

Im Prinzip werden bei diesem Vorgang vier Wasserstoffkerne (= Proton, ^1H) zu einem Heliumkern (^4He) fusioniert, dies passiert allerdings über zwei Zwischenschritte.

Für die Berechnungen sind folgende Zahlenwerte erforderlich:

- Protonenmasse¹ (in Atomeinheiten): $m_p = 1,007276466 \text{ u}$
- Deuteronmasse² (Kern aus einem Proton und einem Neutron, Wasserstoffisotop, ^2H ; in Atomeinheiten): $m_D = 2,013553212 \text{ u}$
- Helium-3-Kern-Masse³ (Kern aus zwei Protonen und einem Neutron, Heliumisotop, ^3He ; in Atomeinheiten); $m_{\text{He-3}} = 3,01493214 \text{ u}$
- Helium-4-Kern-Masse⁴ (Kern aus zwei Protonen und zwei Neutronen, ^4He ; in Atomeinheiten): $m_{\text{He-4}} = 4,00150484 \text{ u}$
- Lichtgeschwindigkeit⁵: $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$
- Atommasseneinheit⁵: $1 \text{ u} = 1,660538921 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Elektronenvolt⁵: $1 \text{ eV} = 1,602176565 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Kommt es zu der Fusion von Wasserstoff zu Helium, sind die Ausgangsprodukte (Wasserstoffkerne) massereicher als das Endprodukt (Heliumkern). Die fehlende Masse wird als Massendefekt (Δm) bezeichnet und als Energie in Form von Photonen abgestrahlt. Diese Energiemenge lässt sich über die Einstein'sche Formel $E = \Delta m \cdot c^2$ berechnen.

Die Masse der Ausgangsprodukte lautet: $4 \cdot m_p = 4,029105864 \text{ u}$, die des Endproduktes $m_{\text{He-4}} = 4,00150484 \text{ u}$. Der Massendefekt beträgt daher $\Delta m = 0,027601024 \text{ u}$, was $4,583257461 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ ⁶ entspricht. Multipliziert man diese Masse mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit erhält man eine Energie von $4,119226379 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Umgerechnet ergibt das $25710189,93 \text{ eV} = 25,71018993 \text{ MeV} \approx 25,710 \text{ MeV}$ ⁷.

Am Ende der Fusionsprozesse muss ein Gesamtmassendefekt von rund 25,710 MeV stehen. Die Schritte im Hauptzweig⁸ der pp-Kette sehen wie folgt aus:

1. Schritt: $^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ – 2 Mal durchlaufen

2. Schritt: $^1\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He}$ – 2 Mal durchlaufen

3. Schritt: $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + ^1\text{H} + ^1\text{H}$

1 siehe Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Proton> (03 08 11)

2 siehe Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Deuteron> (03 08 11)

3 eigene Berechnung aus der Masse des Helium-3-Atoms minus zweimaliger Elektronenmasse, siehe Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Helium-3> (03 08 11) und Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Elektron> (03 08 11)

4 eigene Berechnung aus der Masse des Helium-4-Atoms minus zweimaliger Elektronenmasse, siehe Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Helium-4> (03 08 11) und Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Elektron> (03 08 11)

5 siehe NIST (National Institute of Standards and Technology), <http://physics.nist.gov/cuu/Constants> (03 08 11)

6 Masse in Atomeinheiten mit dem Umrechnungswert für kg multiplizieren

7 Zahlen mit Zehnerpotenzen sind im Allgemeinen unhandlich, aus diesem Grund wird in der Elementarteilchenphysik die Einheit Megaelektronenvolt (MeV) verwendet. Der Wert in J ist durch den Wert für 1 eV zu dividieren.

8 Es gibt noch fünf weitere Fusionswege, die alle weniger häufig sind und weniger Energie freisetzen, siehe Literaturangabe am Ende.

1. Schritt: Bei diesem Vorgang handelt es sich genau betrachtet um einen β^+ -Zerfall. Zwei Protonen bilden ein Teilchen und danach wandelt sich ein Proton in ein Neutron um⁹. Gleichzeitig wird ein Positron (e^+) und ein Elektronneutrino (ν_e) abgegeben. Bei dieser Art von Vorgängen gibt es drei Erhaltungssätze, die erfüllt werden müssen: Ladungs-, Baryonenzahl- und Leptonenzahlerhaltung. Baryonen sind eine Gruppe von Teilchen, zu denen Protonen und Neutronen gehören. Ihre Gesamtzahl darf sich bei einem Vorgang nicht ändern. Leptonen sind eine andere Art von Teilchen, wie Elektronen oder Elektronneutrinos. Auch ihre Gesamtzahl darf sich nicht verändern. Da die Gesamtladung ebenfalls konstant sein muss, klingt da schon irgendwie logisch. Auf der linken als auch auf der rechten Seite muss dieselbe Zahl von Ladungen stehen!

Um es noch ein wenig zu verkomplizieren, gibt es auch noch so genannte Antiteilchen¹⁰, die bei den entsprechenden Teilchensorten negativ gezählt werden, ein solches Teilchen ist zum Beispiel das Positron. Genau betrachtet gilt nun für den Vorgang:

	^1H	^1H	gesamt	→	^2H	e^+	ν_e	gesamt
Ladung Q:	+1	+1	+2		+1	+1	0	+2
Baryonenzahl B:	+1	+1	+2		+2	0	0	+2
Leptonenzahl L:	0	0	0		0	-1	+1	0

Für die Massenbilanz gilt Folgendes:

	^1H	^1H	gesamt	→	^2H	e^+	ν_e	gesamt
Masse in u	1,007276466	1,007276466	2,014552932		2,013553212	0,00054858	≈ 0	2,014101792

Das führt zu einem Massendefekt von $\Delta m = 0,00045114 \text{ u}$ oder $7,491356783 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und einer Energie von $6,732895704 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ beziehungsweise $0,420234314 \text{ MeV}$. Das entstandene Positron reagiert sofort mit einem Elektron (beide besitzen dieselbe Masse) des Sternplasmas und führt eine Anihilation durch. Das bedeutet, dass sich die beiden Teilchen komplett *vernichten* und ihre gesamte Masse ($0,00109716 \text{ u}$) in Photonen zerstrahlt, was einer Energie von $1,021998024 \text{ MeV}$ entspricht. Bei dieser Reaktion werden nun $0,420234314 + 1,021998024 = 1,442232338 \approx 1,442 \text{ MeV}$ ¹¹ frei. Das an sich (fast) masselose¹² Neutrino vermindert durch seine Bewegungsenergie von ungefähr $0,25 \text{ MeV}$, die für die Abstrahlung nutzbare Energie auf $1,192 \text{ MeV}$ in diesem Schritt.

2. Schritt: In diesem Schritt fusioniert ein Wasserstoffkern mit einem im ersten Schritt erzeugten Deuteron zu einem Helium-3-Kern.

	^1H	^2H	gesamt	→	^3He	gesamt
Ladung Q:	+1	+1	+2		+2	+2
Baryonenzahl B:	+1	+2	+3		+3	+3
Leptonenzahl L:	0	0	0		0	0

⁹ Dies geschieht durch die *Schwache Kernkraft*.

¹⁰ Antiteilchen besitzen dieselben Eigenschaften wie die entsprechenden Materieteilchen, jedoch besitzen sie die entgegengesetzte Ladung. Treffen Teilchen und zugehöriges Antiteilchen aufeinander, zerstrahlen sie in Energie.

¹¹ Sowohl Bisnovatyi als auch Cox et al. bestätigen diesen Wert.

¹² Ob das Neutrino eine von Null unterschiedliche Ruhemasse besitzt, ist bis jetzt noch nicht eindeutig geklärt.

Die Massenbilanz liest sich wie folgt:

	^1H	^2H	gesamt	→	^3He	gesamt
Masse in u	1,007276466	2,013553212	3,020809678		3,01493214	3,01493214

Das führt zu einem Massendefekt von $\Delta m = 0,005897538 \text{ u}$ oder $9,793091387 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ und einer Energie von $8,8015916 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ beziehungsweise $5,493521621 \text{ MeV}$. Die nutzbare Energie in diesem Schritt beträgt also ungefähr $5,494 \text{ MeV}^{13}$.

3. Schritt: Hier werden nun zwei unter Schritt 2 erzeugte Helium-3-Kerne zu einem Helium-4-Kern unter Abgabe zweier Wasserstoffkerne fusioniert.

	^3He	^3He	gesamt	→	^4He	^1H	^1H	gesamt
Ladung Q:	+2	+2	+4		+2	+1	+1	+4
Baryonenzahl B:	+3	+3	+6		+4	+1	+1	+6
Leptonenzahl L:	0	0	0		0	0	0	0

	^3He	^3He	gesamt	→	^4He	^1H	^1H	gesamt
Masse in u	3,01493214	3,01493214	6,02986428		4,00150484	1,007276466	1,007276466	6,016057772

Das führt zu einem Massendefekt von $\Delta m = 0,013806508 \text{ u}$ oder $2,29262439 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$ und einer Energie von $2,060508043 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ beziehungsweise $12,8606802 \text{ MeV}$. Die nutzbare Energie in diesem Schritt beträgt circa $12,861 \text{ MeV}^{14}$.

Für den dritten Schritt werden zwei Helium-3-Kerne benötigt, also sind für diese beiden Kerne die ersten beiden Schritte zwei Mal zu durchlaufen.

Die Gesamtenergiebilanz der nutzbaren Energie lautet nun: $2 \cdot 1,192 + 2 \cdot 5,494 + 12,861 = 26,233 \text{ MeV}^{15}$. Nimmt man nun den berechneten Gesamtmassendefekt von $25,710 \text{ MeV}$ her, addiert die bei der Anihilation freiwerdenden Elektronenenergien von je $1,022 \text{ MeV}$ und zieht, die durch die Neutrinos verloren gegangene Energie ab, erhält man wiederum den Wert, der zuvor berechneten **26,232 MeV** nutzbare Energie.

Weiterführende Literatur:

Bisnovatyi G. S., *Stellar physics – 1: Fundamental Concepts and Stellar Equilibrium*, A&A-Library, 2001, Seiten 138-139

Cox A. N., Livingston W. C., Matthews M. S., Hrsg., *Solar interior and atmosphere*, 1982, Seite 33

Kippenhahn R., Weigert A., *Stellar Structure and Evolution*, Springer, 1994, Seiten 162-164

¹³ Cox et al. geben $5,493 \text{ MeV}$, Bisnovatyi den berechneten Wert an.

¹⁴ Cox et al. geben $12,859 \text{ MeV}$, Bisnovatyi $12,860 \text{ MeV}$ an.

¹⁵ Kippenhahn liefert $26,20 \text{ MeV}$, Bisnovatyi $26,23 \text{ MeV}$