Eine neue Methode zur Betrachtung zufälliger Erscheinungen und ihre Anwendung in einem Stochastiklehrgang für die Klassen 5 bis 10

Seminararbeit,
im Rahmen der Lehrveranstaltung KO 814188
Konversatorium über Probleme des Mathematikunterrrichts

Kittel Matthias 9502020
kittel@astro.univie.ac.at

Wien,

26. August 2003

Inhaltsverzeichnis

Prolog **iv**

1 Einleitung **1**

2 Eine neue Betrachtungsweise zufälliger Vorgänge **2**
2.1 Ziele und Aspekte der Prozessbetrachtung 2
2.2 Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen im Alltag 6
2.3 Arten zufälliger Vorgänge und Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes 6
2.4 Zufällige Vorgänge und statistische Untersuchungen 8
2.5 Analyse mehrstufiger Vorgänge zur Anwendung der Pfadregeln . . 9

3 Anschließende Diskussion **10**

4 Die Lehrbücher und ausgewählte Beispiele **12**
4.1 Beispiele 13

Literaturverzeichnis **16**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Beispiele zufälliger Ereignisse, aus [6], Seite 92 3
2.2 Eigenschaften eines zufälligen Vorgangs, aus [6], Seite 92 4
2.3 das Bernoulli-Experment, aus Mathematik 10, Seite 166 5
2.4 der Zufallsversuch, aus Mathematik Oberstufe, Seite 206, hpt, 1991 5
2.5 zufällige Erscheinungen im Alltag, aus [9], MV G, Seite 179, paetec 2000 6
2.6 zufällige Vorgänge und statistische Untersuchungen, aus [7], Seite 107 8
2.7 Pfadregeln für mehrstufige Vorgänge, aus [9], Seite 182 f. 9

Tabellenverzeichnis

2.1 Ergebnisse einer Umfrage über Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Schulklasse der 12.Schulstufe, Teil 1, aus [14] 7
2.2 Ergebnisse einer Umfrage über Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Schulklasse der 12.Schulstufe, Teil 2, aus [14] 9

Prolog

Zufall maskulin, mittelhochdeutsch *zouval*, mittelniederdeutsch *toval*, mittelniederländisch *toeval*. Lehnübersetzung des gleichbedeutenden lateinischen *accidēns* neutrum, Partizip von *accidere* (aus lateinisch *ad* „zu“ und lateinisch *cadere* „fallen“). Der Begriff stammt aus der Logik, ist aber durch den theologischen Sprachgebrauch der Mystiker mitbestimmt worden.

wahrscheinlich Adjektiv. Im 17. Jahundert als Lehnübersetzung zu lateinisch *vērīsimilis*, gleiche Bedeutung gebildet, nach dem Vorbild zu neuniederländisch *waarschijnlijk* und französisch *vraisemblable*.

Kluge, Etymologisches Wörterbuch

Auch der Zufall ist nicht unergründlich - er hat seine Regelmäßigkeit. [Novalis]

Professor Hans-Dieter Sill präsentierte in seinem Vortrag einen neuen Zugang zu Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, den er während der Zusammenstellung einer Schulbuchserie für die Klassen 5 bis 10 für die Gymnasien im deutschen Bundesland Mecklenburg-Vorpommern entwickelt hatte. Vorausschickend ist sein Eintreten für das Interpretieren von Ergebnissen der Rechnungen, und das in den Mittelpunkt stellen der Zusammenhänge des Zufallsexperimentes zu nennen.
Ob dieser Zugang (über den nach dem Vortrag heftig debatiert wurde) einen Schritt in Richtung besseres Verständnis für die Schüler darstellt, ist dem Leser selbst überlassen.

Das, wobei unsere Berechnungen versagen, nennen wir Zufall. [Albert Einstein]

Kapitel 1

Einleitung

Im Rahmen des Konversatoriums *Probleme des Mathematikunterrichtes* stellte Professor Dr. Hans-Dieter Sill einen neuen Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. Das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein vieldiskutiertes und sorgt im Rahmen des Schulunterrichtes immer wieder für Aufregung und teilweise beachtliche Verwirrung. Professor Sill versucht, mittels seiner neuen Ansätze Klarheit in die Wahrscheinlichketisrechnung zu bringen.

Der von Professor Sill vorgeschlagene Weg des Zuganges zur Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht darin, eine neue Art der Prozessbetrachtung einzuführen. Nicht nur das eingetretene oder möglicherweise eintretende Ergebnis wird betrachtet, sondern der Prozess (oder Vorgang), aufgrund dessen die Ergebnisse eintreffen. Aus diesem Grund wird nicht ein Ereignis als zufällig betrachtet, sondern der Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt.

Als das einzige Kriterium für die Zufälligkeit eines Vorganges, ist die Existenz von der Möglichkeit unterschiedlicher Ergebnisse anzusehen. Die Nichtbestimmbarkeit des Ergebnisses ist ein nicht notwendiges Merkmal.

Um einen Prozess vollständig betrachten zu können, muss angegeben werden, welches *Merkmal* dieses Prozesses man überhaupt beobachten will, denn die Zufälligkeit eines Vorganges kann nur hinsichtlich dieses vorausgewählten Merkmals bestimmt werden.

Desweitern sind die *Bedingungen* denen der Prozess unterliegt, und die Einfluss auf ihn ausüben, anzugeben. Professor Sill versucht den Vorgang der Zufälligkeit in einen größeren Rahmen einzubetten, um so den Zugang für Schüler leichter zu gestalten.

Alle in dieser Arbeit verwendeten Graphiken stammen aus der Lehrbuchserie[1] von Professor Sill und wurden zum Teil auch in seinem Seminarvortrag innerhalb dieses Konversatoriums verwendet. Dieser Vortrag bildet auch die Grundlage dieser Arbeit.

[1]Mathematik 5 bis Mathematik 10, paetec Verlag, Lehrbücher für das deutsche Bundesland Mecklenburg-Vorpommern

Kapitel 2

Eine neue Betrachtungsweise zufälliger Vorgänge

2.1 Ziele und Aspekte der Prozessbetrachtung

Um einen zufälligen Vorgang beschreiben zu können, müssen verschiedene Aspekte desselben in Betracht gezogen werden (siehe Abbildung 2.1). Der Vorgang selbst, das Merkmal, das man betrachten will, die möglichen Ergebnisse und die Möglichkeiten der Wiederholung, um spätere statistische Berechnungen durchführen zu können. Besonders ist hervorzuheben, dass **nicht** ein mögliches Ergebnis des Vorganges, wie eine Sprungweite von 150 Zentimeter oder das Würfelergebnis „Sechs" der Zufälligkeit unterlieget, **sondern** der Vorgang selbst; das Weitspringen eines Schülers oder das Werfen des Würfels ist der zufällige Vorgang.

Die Zufälligkeit eines Vorganges kann nur bezüglich eines Merkmales betrachtet werden, bei den hier gebrachten Beispielen ist das Merkmal natürlich die Sprungweite (oder die dafür erhaltene Note) beziehungsweise die Augenzahl des Würfelwurfes.

Die Bedingungen, unter denen eine Vorgang abläuft sind von zentraler Bedeutung, hat der Schüler bei seinem Sprung Gegen- oder Rückenwind, wie lang ist der Anlauf, wie gut traniert ist der Springer, mit welcher Art Schuhe springt er, etc., beim Werfen eines Würfels ist zu beachten, dass dieser fair gebaut ist. Nur wenn diese Bedingungen klar definiert sind, ist es möglich Wahrscheinlichkeiten einzuführen. Der im wissenschaftlichen Gebrauch verwendete Ausdruck des *Zufallsexperimentes* oder *Zufallsversuches* sollte nicht an Stelle des Begriffes *zufälliger Vorgang* verwendet werde, deutet der Begriff *Experiment* im Allgemeinen auf einen gezielten Vorgang hin. Ein Zufallsexperiment ist die experimentelle Untersuchung eines zufälligen Vorgangs.

Für die Betrachtung von zufälligen Vorgängen und deren Beschreibung ist oft

Vorgang	ein Schüler springt	Werfen eines Würfels	Wachstum einer Getreideähre
Merkmal	Zensur für die Weite	Augenzahl	Länge
mögliche Ergebnisse	Zensuren 1 bis 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	Längen zwischen 5 cm und 15 cm
Bedingungen	z. B. Sprungkraft, Technik, Anlaufweite, Windbedingungen	z. B. Wurftechnik, Unterlage, Würfel	z. B. Bodengüte, Erbanlagen, Wetter
mögliche Wieder-holungen	Alle Schüler einer Klasse springen.	Es werden 600 Würfe untersucht.	Alle Ähren eines Feldes werden geprüft.

Abbildung 2.1: Beispiele zufälliger Ereignisse, aus [6], Seite 92

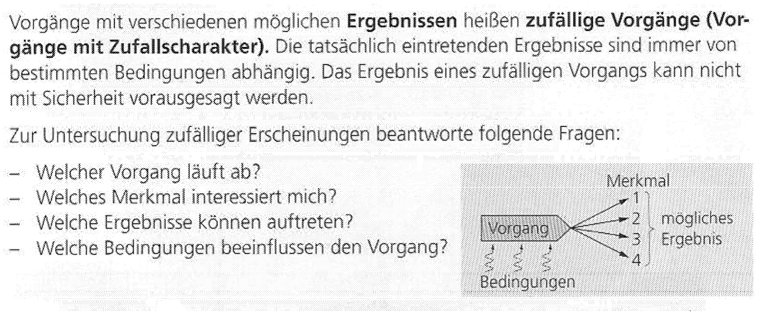
eine große Anzahl von Wiederholungen des Vorganges notwendig, deswegen ist darauf zu achten, dass der Vorgang unter **denselben** oder ähnlichen Bedingungen wiederholbar ist.

Ziel dieser Art von Prozessbetrachtung ist, die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Zufallsversuch, zuälliges Ereignis, Zufallsgröße, etc.) und der Statistik (Grundgesamtheit, Merkmal, Merkmalsausprägung, etc.) auf eine gemeinsame Basis (zufälliger Vorgang, Merkmal, Ergebnisse) zu stellen. Der Schüler soll bei der Entwicklung seines Wahrscheinlichkeitsbegriffes auf seine intuitiven Vorstellungen und den Gebrauch in der Umgangssprache zurückgreifen können. Durch die Frage: „*Was ist wahrscheinlicher?*" gelangt der Schüler zu neuen Einsichten und erweitert sein Können im Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff. Über den Gebrauch von Begriffen wie *gleich wahrscheinlich* oder *mehr oder weniger wahrscheinlich* gelangt der Schüler zum quantitativeren Begriff der *Wahrscheinlichkeit*, der nun als Maß für das Eintreffen eines Ergebnisses eines zufälligen Vorganges dienen kann. Nach Einführung der rationalen Zahlen lassen sich Wahrscheinlichkeiten leicht auf dem Zahlenstrahl zwischen 0 und 1 eintragen.

Dieses Konzept fördert das leichtere Erkennen von zufälligen Vorgängen im Alltag, liefert ein besseres Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes im Allgemeinen und für das Suchen von Zusammenhängen zwischen Wahrscheinlichkeiten und statistischen Begriffen im Speziellen (siehe auch Abbildung 2.2).

Wie läuft nun die Prozessbetrachtung überhaupt ab? Folgender Ablauf ist sinnvoll:

1. *Betrachtung eines einzeln zeitlich ablaufenden Vorgangs in der Natur, der*


Vorgänge mit verschiedenen möglichen **Ergebnissen** heißen **zufällige Vorgänge (Vorgänge mit Zufallscharakter).** Die tatsächlich eintretenden Ergebnisse sind immer von bestimmten Bedingungen abhängig. Das Ergebnis eines zufälligen Vorgangs kann nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden.

Zur Untersuchung zufälliger Erscheinungen beantworte folgende Fragen:

- Welcher Vorgang läuft ab?
- Welches Merkmal interessiert mich?
- Welche Ergebnisse können auftreten?
- Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?

Abbildung 2.2: Eigenschaften eines zufälligen Vorgangs, aus [6], Seite 92

Gesellschaft oder dem Denken in der Vergangenheit, der Gegenwart oder der Zukunft (aus [13])

2. Auswahl eines zu betrachtenden Merkmals

3. Bestimmung möglicher Ergebnisse des Vorgangs bezüglich dieses Merkmals

4. Betrachtung der Bedingungen eines einzelnen Vorgangs und ihrer Ausprägungen bei Ablauf des Vorgangs

5. Betrachtung einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs

6. Unterscheidung von Vorgang und Experimtent: *Die experimentelle Untersuchung eines zufälligen Vorgangs, d.h. die Planung, Durchführung und Auswertung einer bestimmten Anzahl von Wiederhlungen des Vorgangs heißt* **Zufallsexperiment** (aus [14]]).

Als grundlegendes Beispiel für einen zufälligen Vorgang ist das Bernoulli-Experiment zu nennen. Dieses Experiment ist von besonderer Bedeutung, da nur zwei mögliche Ausgänge des Experimentes möglich sind (siehe Abbildung 2.3) und daher als einfaches, einführendes Beispiel dienen kann. Aufgaben, in denen es nur um die Ausgänge *tritt ein* beziehungsweise *tritt nicht ein* geht sind Grundbausteine in der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten (Ausblick: Binominalverteilung).

Neben der genauen Definition der Prozessbetrachtung ist es in der Mathematik unerlässlich, sich einer korrekten und präzisen Sprache zu bedienen. Diese muss in der Schule allerdings erst erlernt werden (Abbildung 2.4). Begriffe wie *Zufallsversuch*, *Grundgesamtheit* oder *relative Häufigkeit* benötigen eine genaue Einführung und ausführliche Beschreibung. Diese Grundbegriffe der mathematischen Sprache sind genauso wie die Definition des Zufallsexperimentes und der Prozessbetrachtung essentiell und deren Einführung sollte profund und strukturiert im Unterricht vorgetragen werden.

Wenn bei einem zufälligen Vorgang bezüglich eines Merkmals nur das Eintreten oder das Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses untersucht wird, so bezeichnet man diese Untersuchung als ein **Bernoulli-Experiment** oder **Bernoulli-Versuch.** Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der betreffenden Ereignisse nennt man **Erfolgswahrscheinlichkeit** oder **Trefferwahrscheinlichkeit.**

Vorgang	Merkmal	Eintreten des Ereignisses	Nichteintreten des Ereignisses
Tom schießt auf eine Torwand.	Treffer	Tom trifft.	Tom trifft nicht.
Herstellen eines Gerätes.	Qualität	Das Gerät ist OK.	Das Gerät hat Fehler.
Werfen eines Würfels.	Augenzahl	Es fällt eine 6.	Es fällt keine 6.
Ablauf einer Sportstunde.	Unfall-geschehen	Es tritt mindestens ein Unfall auf.	Es tritt kein Unfall auf.

Abbildung 2.3: das Bernoulli-Experment, aus Mathematik 10, Seite 166

7.3 Zufallsversuche; Ereignisse

In diesem Abschnitt lernen wir eine einheitliche Sprechweise kennen, mit der man Vorgänge wie die Auswahl einer Familie, das Werfen eines Würfels, das Ziehen aus einer Urne usw. beschreiben kann.

Vorgänge wie das Werfen eines Würfels, Werfen einer Münze, Drehen eines Glücksrades, Ziehen aus einer Urne usw. bezeichnet man als *Zufallsversuche.* Allgemein bezeichnet man einen Vorgang als **Zufallsversuch**, wenn mehrere **Versuchsausfälle** möglich sind, jedoch **ungewiß** ist, welcher Ausfall eintritt. Beispielsweise ist das Werfen eines Würfels ein Zufallsversuch, weil die Versuchsausfälle 1, 2, 3, 4, 5, 6 möglich sind, jedoch ungewiß ist,

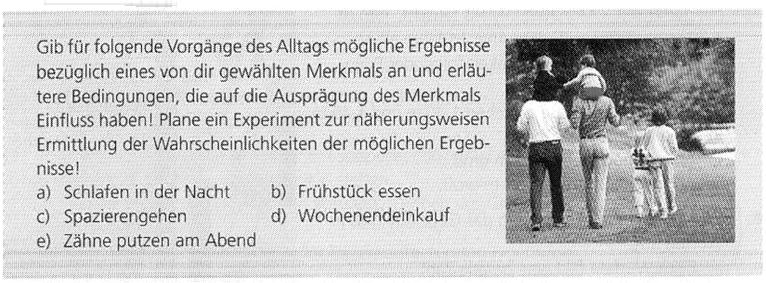
Abbildung 2.4: der Zufallsversuch, aus Mathematik Oberstufe, Seite 206, hpt, 1991

2.2 Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen im Alltag

Um den Schülern einen leichteren Einstieg in die Materie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zu gewähren, wird zuerst auf alltägliche, den Schülern bekannte Phänomene wie *Schlafen in der Nacht* oder *Zähne putzen am Abend* (Abbildung 2.5) zurückgegriffen.

Professor Sill hat einige Tests bezüglich des Wissens über Wahrscheinlichkeitsrechnung in einigen Klassen durchgeführt. Diese Umfragen waren laut seinem neuen Zugang in die Kategorien *Vorgang, betrachtetes Merkmal, mögliche Ergebnisse* und *Vorgang ist zufällig* unterteilt (siehe Tabelle 2.1). Der Vorgang und das betrachtete Merkmal waren in allen Fällen bis auf den letzten vorgegeben. Die Schüler mussten die möglichen Ereignisse angeben, und beurteilen, ob der angegebene Vorgang zufälig wäre. Im letzten Fall war der Vorgang und die Aussage *nicht zufällig* angegeben, die Schüler hatten nun das zu betrachtende Merkmal und die möglichen Ergebnisse einzutragen. Die Nummern innerhalb der Tabelle geben die Anzahl der gegeben Antworten der Schüler wider.

Wie man aus der Tabelle erkennen kann, sind die Antworten im Großen und Ganzen richtig und zeigen von Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Bezug auf Alltagserfahrungen.


Gib für folgende Vorgänge des Alltags mögliche Ergebnisse bezüglich eines von dir gewählten Merkmals an und erläutere Bedingungen, die auf die Ausprägung des Merkmals Einfluss haben! Plane ein Experiment zur näherungsweisen Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse!

a) Schlafen in der Nacht
b) Frühstück essen
c) Spazierengehen
d) Wochenendeinkauf
e) Zähne putzen am Abend

Abbildung 2.5: zufällige Erscheinungen im Alltag, aus [9], MV G, Seite 179, paetec 2000

2.3 Arten zufälliger Vorgänge und Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes

Die Anzahl beziehunnsweise Vielfalt von Wahrscheinlichkeitsvorgängen in unserer Umgebung ist riesengroß. Deswegen ist eine Einteilung in Kategorien sinnvoll. Überraschenderweise fällt die Einordnung der Vorgänge leicht, man kann diese in zwei unterschiedliche Arten einteilen; in **Vorgänge in der Natur oder der Gesellschaft** und in **Denkprozesse**. Während man im ersten Fall die Zustände der

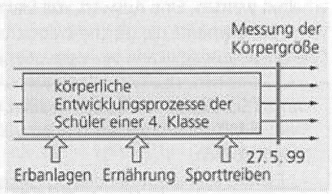
Vorgang	**betrachtetes Merkmal**	**mögliche Ergebnisse**	**Vorgang zufällig?**
Zieher einer Karte aus einem Skatspiel	Farbe der Karte	*schwarz, rot*:**17**	*ja*:**17** *nein*:**0** *k.A.*:**0**
Fallenlassen eines Körpers auf die Erde	Bewegungs-richtung des Körpers	*unten; runter; senk-recht; ...*:**16** *unten, links, rechts*:**1**	*ja*:**1** *nein*:**15** *k.A.*:**1**
Spaziergang durch die Stadt	Treffen eines bestimmten Freundes	*ja* oder *nein*:**17**	*ja*:**17** *nein*:**0** *k.A.*:**0**
Abkühlen von Wasser unter 0 Grad	Aggregat-zustand des Wassers	*fest; Eis; gefriert*:**16** *k.A.*:**1**	*ja*:**0** *nein*:**16** *k.A.*:**1**
Wachstum eines Menschen	Körpergröße	*groß, klein*:**10**, *Inter-valle*:**2** *unbest. Größe*:**2** *Zuwachs*:**2**, *k.A.*:**1**	*ja*:**14** *nein*:**3** *k.A.*:**0**
Werfen eines Würfels	*eine Zahl; ...*:**15** *Richtung*:**1**, *k.A.*:**1**	*1,2,3,4,5,6*:**13** *eine Zahl*:**2**, *k.A.*:**2**	**nein**

Tabelle 2.1: Ergebnisse einer Umfrage über Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Schulklasse der 12.Schulstufe, Teil 1, aus [14]

Natur und Gesellschaft kennen muss, benötigt man im zweiten Wissen über das Subjekt und dessen Gedanken. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen Vorgängen ist, dass die Ergebnisse durch das Denken des beobachtenden Subjektes im Fall der Vorgänge der Natur oder Gesellschaft nicht beeinflusst werden (objektive Ergebnisse), währenddessen bei Denkprozessen die Wahrscheinlichkeiten des Ausgangs durch die Kenntnisse des Subjekts abgeändert werden (subjektive Ergebnisse).

Normalerweise werden im Schulunterricht nur Prozesse erster Kategorie betrachtet, da diese meistens unverrückbaren Ordnungen folgen, deren Wahrscheinlichkeiten großteils unverändert bleiben. Dem entgegengesetzt sind Vorgänge zweiterer Art durch ihre Komplexität interessanter und herausfordernder. Diese Wahrscheinlichkeitsvorgänge im Mathematikunterricht zu forcieren und dadurch die Alltagserfahrung zu vertiefen, wäre für Schüler von Vorteil.

In der Statistik werden die Ergebnisse der zufälligen Vorgänge als **Ausprägungen des Merkmals** oder als **Daten** bezeichnet. Die Gesamtheit aller Objekte, die bei einer statistischen Untersuchung betrachtet werden sollen, heißt **Grundgesamtheit.** Die Objekte heißen Elemente der Grundgesamtheit.



Die zufälligen Vorgänge laufen meist zeitlich parallel ab. Das Erfassen der Daten erfolgt hingegen zu einem bestimmten Zeitpunkt während des Verlaufs der zufälligen Vorgänge.

Zur Auswertung von Daten stelle dir folgende Fragen:
- Gibt es Übereinstimmung mit meinen bisherigen Vorstellungen?
- Welche Ursachen könnte es für die Art der Verteilung der Daten geben?
- Welche Zusammenhänge mit anderen Datensätzen gibt es?
- Welche Vergleiche zur Veranschaulichung der Daten sind möglich?

Abbildung 2.6: zufällige Vorgänge und statistische Untersuchungen, aus [7], Seite 107

2.4 Zufällige Vorgänge und statistische Untersuchungen

Wenn man mit Wahrscheinlichkeiten arbeitet, kommt man nicht darum herum sich auch mit deren Auswertung, sprich mit Statistik zu befassen. Diese Daten oder Ausprägungen des Merkmals (siehe Abbildung 2.5) sind die Grundlage für statistische Untersuchungen. Um nun Statistik betreiben zu können, muss ein zufälliger Vorgang wiederholt beobachtet, beziehungsweise auf eine Grundgesamtheit (Schülergruppe, Familienmitglieder, Streichholzschachteln, etc.) zurückgegriffen werden können.

Im zweiten Teil des schon genannten Tests über Wahrschinlichkeit (siehe Tabelle 2.2) wurden auch statistische Aspekte berücksichtigt. Bei dem Beispiel in der Tabelle waren die Rubriken *Anzahl der Wiederholungen* und *betrachtetes Merkmal* vorgegeben. Die Schüler hatten die *Ausprägungen des Merkmals* und den *zufälligen Vorgang* einzutragen. Bei letzteren trugen die Schüler *Zählen der Streichhölzer* oder *Anzahl der Streichhözer* als maßgeblichen zufälligen Vorgang ein. Dies ist der häufig auftretende Fehler, den Professor Sill durch seinen neuen Zugang eliminieren möchte.

Durch die Unkenntnis über den Vorgang der Erzeugung von Streichholzschachteln, ist der Schüler nicht in der Lage auf den eigentlichen zufälligen Vorgang **Befüllen der Streichholzschachteln** zu schließen. Für die Interpretation der Daten sind Kenntnisse, die über die mathematische Angabe hinausgehen, von Nöten, die sich natürlich auch mit Produktionsvorgängen oder physikalischen Vorgängen befassen müssen. Durch Einbeziehung aller Aspekte in die Mathematikaufgabe, sind Schüler dadurch fähig den zufälligen Vorgang leichter zu identifizieren, und sind damit in der Lage das aufgegebene Beispiel richtig zu lösen.

zufälliger Vorgang	**Grund-gesamtheit**	**betrachtetes Merkmal**	**mögliche Ausprägungen**
Zählen, Anzahl der Streichhölzer	*100 Streich-holzschachteln*	*Anzahl der Streichhölzer*	x, $38 \pm x$, *(nicht)gleiche Anzahl*

Tabelle 2.2: Ergebnisse einer Umfrage über Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Schulklasse der 12.Schulstufe, Teil 2, aus [14]

2.5 Analyse mehrstufiger Vorgänge zur Anwendung der Pfadregeln

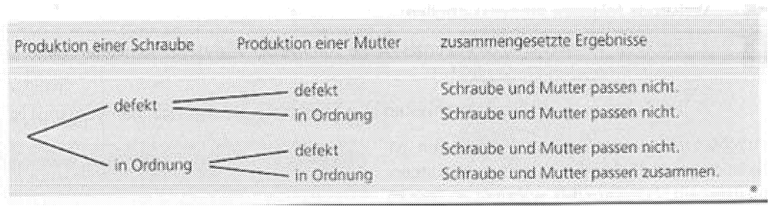


Abbildung 2.7: Pfadregeln für mehrstufige Vorgänge, aus [9], Seite 182 f.

Mehrstufige Wahrscheinlichkeitsvorgänge rufen bei Schülern besondere Schwierigkeiten hervor, deswegen lohnt es sich diese genauer zu betrachten. Ein einfacher mehrstufiger Vorgäng ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Um einen solchen leichter untersuchen zu können, wird er in Teilvorgäng zerlegt. Man geht wie folgt vor:

1. Bestimmung der (nacheinander oder gleichzeitig ablaufenden) Teilvorgänge, sowie aller interessierenden Ergebnisse derselben.

2. Ordnung der Teilvorgänge nach ihrer zeitlichen Abfolge.

3. Erstellen eines Baumdiagramms, in welchem jedes Ergebnis des vorangegangenen Teilvorganges Ausgangspunkt des folgenden ist.

4. Jedes Ergebnis, das am Ende eines Pfades steht ist die Zusammensetzung der Teilvorgänge innerhalb des Pfades.

Mit Hilfe dieser Anleitung lassen sich mehrstufige Wahrscheinlichkeitsvorgänge übersichtlich durch Schüler lösen.

Kapitel 3

Anschließende Diskussion

In der, an den Vortrag anschließenden Diskussion, wurde heftig zwischen zwei sich herauskristallisierenden Gruppen debatiert. Die eine Seite unterstütze Professor Sill in seinem neuen Zugang und favorisierte die engere Verschränkung von mathematischer Berechnung und Interpretation der Ergebnisse, die andere Seite wies darauf hin, dass Interpretationen von Ergebnissen und die Auswertungen von Statistiken nicht in den Mathematikunterrricht gehörten, sondern besser in anderen Fächern, wie zum Beispiel Biologie (Ährenwachstum) oder Turnen (Weitsprung) aufgehoben wären, da das Interpretieren und Auswerten der eigentlichen Intention der Rechenbeispiele zuwider laufen und nur ablenkend wirken würde.

Das Argument der Ablenkung führt meiner Meinung aber ins Leere, da eine Einbettung jedes Beispieles in einen größeren Zusammenhang zum besseren Verständnis führen muss. Der grobe Fehler, das Zählen einer Menge von Gegenständen einer Packung als den *Zufallsvorgang*, der zu der Anzahl der Gegenstände in der Packung führt, anstelle des Einfüllens der Gegenstände in die Packung anzusehen, tritt bei dem neuen Zugang von Professor Sill nicht auf, weil in der Vorbereitung explizit auf den Zufallsvorgang eingegangen wird und der Schüler die Ebene der reinen Berechnung verlassen muss, um das Beispiel als gesamtes überlicken zu können. Desweiteren ist der hier vorgestellte Zugang in seiner Gesamtheit dazu angetan, um das Verständis der Mathematik in alltäglichen Situationen zu fördern. Darüberhinaus ist das Potential für den fächerübergreifenden Unterricht und Projektunterricht beträchtlich; das Argument der Ablekung der Schüler wird hier in sein Gegenteil verkehrt - das Gefühl für Zufallsvorgänge in der Alltagswelt, wissenschaftlichen und persönlichen Welt, sowie deren Auswertung mittels Statistiken wird gefördert.

Die gemachten Fehler der Schüler werden minimiert, da die Verschränkung von wissenschaftlich-mathematischen Begriffen mit Begriffen der Alltagserfahrung besonders betont wird. Nach meiner Erfahrung ist die besonders große Abneigung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Schülerkreisen dadurch gegeben, dass sie für besonders viele als *unlogisch* und nicht der üblichen Logik der Mathematik folgend eingestuft wird. Durch die Betrachtung und Identifizierung des Zufallsvoranges wird die Transperenz der Beispiele und dadurch die Lösungskompetenz der Schüler erhöht. Das Verstehen und richtige Erstellen, Interpretieren und Lesen von Statistiken wird durch die vorher genannten Zusammenhänge ebenfalls wesentlich erleichtert.

Es stimmt, dass dieser Zugang Schüler in wesentlichen Dingen von der puren Mathematik ablenkt; diese *Ablenkung* aber das Wissen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Ganzen erheblich steigert und diese Art der Mathematik in einen übergreifenden konstruktiven Zusammenhang stellt.

Kapitel 4

Die Lehrbücher und ausgewählte Beispiele

Hier sind die Kapitel der von Professor Sill herausgegebenen Schulbuchserie aufgelistet, die sich mit Wahrscheinlichkeit und Statistik befassen. Um Abwechslung in den Mathematikunterricht zu bringen, sind im Anhang der Bücher Anleitungen zu Projektarbeiten beigefügt. Diese Projekte sind eine weitere Möglichkeit, den Schülern praxisbezogene Mathematik (Mathematik im Alltag) näher zu bringen. Im Anschluss sind Beispiele (je eines aus jedem Jahrgang) aufgelistet, die meiner Meinung nach exemplarisch für Professor Sills neuen Zugang zur Wahrscheinlichkeit stehen oder einen besonders relevanten Zugang zum Alltagsleben liefern. Lehrbuch *Mathematik 10* war in der Bibliothek nicht verfügbar.

- 5.Klasse (Seite 64-74) - Beschreiben und Auswerten zufälliger Vorgänge
  - Zufällige Vorgänge und Wahrscheinlichkeiten
  - Erfassen, Darstellen und Auswerten von Daten
  - Projekt (Seite 235): Schülergrößen
- 6.Klasse (Seite 92-114) - Wahrscheinlichkeit und Daten
  - Zufällige Vorgänge und Wahrscheinlichkeiten
  - Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit
  - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten
  - Arithmetisches Mittel
  - Darstellen und Auswerten von Daten
  - Projekt (Seite 235): Heimische Wälder
- 7.Klasse (Seite 141-156) - Stochastik
  - Kenngrößen von Häufigkeitsverteilungen

  - Planen und Durchführen statistischer Erhebungen
  - Projekt (Seite 197): Lerne deine Klasse kennen

- 8.Klasse (Seite 175-192) - Stochastik

  - mehrstufige Vorgänge
  - Gemische Aufgaben
  - Projekt (Seite 208): sicher und gesund durch den Straßenverkehr

- 9.Klasse (Seite 111-130) - Stochastik

  - Zufallszahlen
  - Gemischte Aufgaben

4.1 Beispiele

Aus [3], Seite 68, Beispiel 10:

Für eine Familie mit zwei Kindern können folgende Fälle auftreten. Es sind: (A) zwei Mädchen, (B) ein Mädchen und ein Junge, (C) zwei Jungen. Vermute, welche der drei Möglichkeiten am wahrscheinlichsten ist oder ob alle gleich wahrscheinlich sind!

1. Überprüfe deine Vermutung mit einem Experiment. Da Mädchen und Junge etwa gleich häufig geboren werden, kannst du mit einer Münze experimentieren. Fällt Kopf, ist es ein Mädchen (M), bei Zahl notierst du einen Jungen (J).
   Für das Nachspielen von zwei Geburten kannst du auch zwei Münzen gleichzeitig werfen. Erzeuge auf diese Weise 10 Serien mit je 8 Geschwisterpaaren. Zähle in jeder Serie die Häufigkeit der Fälle A, B oder C und nach jeder Serie die Häufigkeiten in allen bisherigen Serien. Stelle die Häufigkeiten nach 10 Serien in einem Streifendiagramm dar! Vergleiche mit deiner Vermutung und korrigiere sie, wenn nötig!

2. Schreibe von allen dir bekannten Geschwisterpaaren auf, welche der Fälle A, B oder C zutreffen, und bestimme die Häufigkeit der Fälle! Vergleiche mit deinen Ergebnissen bei 1.!

Dieses Beipiel lässt sich wohl nur als Klassiker in der Wahrscheinlichkeit bezeichnen, nichtsdestotrotz erscheint es hier in neuer Form. Mit Hilfe dieses Beispieles wird das Durchführen eines Zufallsexperimentes erklärt, der Übergang von alltäglichen Erfahrungen (Geschwisterpaaren) zur mathematischen Darstellung (Wahrscheinlichkeiten) über einen abstrakten zufälligen Vorgang

(Münzenwurf). Die Schüler überprüfen von ihnen selbst erstellte Vermutungen durch das Zufallsexperiment und über die Interpretation der Ergebnisse werden sie dazu angehalten, wenn notwendig ihre Vermutungen hinsichtlich des Experimentes zu verbessern oder zu revidieren.

Aus [5], Seite 98, Beispiel 1:

Stefan und Thomas trainieren für einen Hochsprungwettkampf. Bei 26 Sprüngen erreicht Stefan 8-mal mindstens eine Höhe von 1,50 m. Thomas überspring bei 6 von 17 Versuchen mindestens die 1,50 m. Wer sollte nominiert werden?

Auch ein altbekanntes Beispiel, doch ist hier die Fragestellung anders als gewöhnlich; es wird nicht gefragt, wer *besser* ist, sondern wer für den Wettkampf nominiert werden sollte. Es wird gezeigt, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung dazu dienen kann, zu entscheiden, wer auf Grund seiner Leistungen für Wettkämpfe nominiert werden sollte. Dass den Schülern oft Probleme bereitende Wörtchen *mindestens* kann durch dieses Beipiel ebenfalls auf geschickte Weise im Sinne der Wahrscheinlichkeit erklärt werden.

Aus [7], Seite 155, Beispiel 1:

Wie zufrieden sind Schüler mit ihrem Taschengeld?

1. Plane in deiner Klasse eine Befragung zu diesem Thema!
2. Wie ist die Aussagekraft dieser statistischen Erhebnung einzuschätzen? Welche Faktoren müßten noch bekannt sein?

Ein Beispiel, das gleich zu Beginn der Einführung statistischer Erhebungen deren Beschränkung aufzeigt. Die Ausführung selbsterstellter Umfragen schult statistische Fähigkeiten und zeigt die Aussagekraft solcher Umfrage auf. Das kritische Betrachten von Statistiken in Zeitungen und Magazinen wird durch Beispiele dieser Art gefördert.

Aus [9], Seite 188, Beispiel 5:

Das Blut eines Menschen hat die Eigenschaft, Rhesus-positiv (Rh^+) oder Rhesus-negativ (Rh^-) zu sein. Ungefähr 85% der Menschen sind Rh^+. Wird ein Kind geboren, dessen Mutter Rh^- und dessen Vater Rh^+ ist, kann bei der Geburt ein Austausch des kindlichen Blutes notwendig werden.

1. Wie wahrscheinlich ist in einer Klinik die Geburt eines Kindes, dessen Eltern die angegebenen Bluteigenschaften haben?

2. Eine werdende Mutti ist Rh^-. Der Rhesusfaktor des Vaters ist unbekannt. Welche Wahrscheinlichkeit sollte für einen Blutaustausch beim Kind angenommen werden?

Dieses Beispiel begeistert mich, stellt es doch einen absolut wichtigen Alltagsbezug dar (das Beispiel ist für die achte Schulstufe nicht zu früh gewählt). Ein einfaches Beispiel, das im fachübergreifenden Unterricht mit Biologie endlich ein wirklich lehrreiches für das Leben der Schüler sein kann.

Aus [11], Seite 125, Beispiel 4:

Prüfe anhand eines Telefonbuches, ob man die Telefonnummern als Zufallszahlen benutzen kann! Untersuche auch, ob sich eventuell die letzten drei Ziffern der Telefnnummern als Zufallszahlen eigenen!

Zufallszahlen und deren Erstellung ist ein Thema, welches erst kürzlich Eingang in die Mathematikschulbücher gefunden hat. Doch spielen diese Zahlen eine immer größere Rolle, besonders in der Softwareindustrie. Dieses Beispiel ist wiederum einfach gestrickt, und es können mit simplen Mitteln (Telephonbücher, jeder Schüler nimmt eines von zu Hause mit) theoretische Aussagen über Zufallszahlen getroffen werden.

Zu jeden Mathematikbuch der Serie gibt es ein Arbeitsheft (A4-Heft), mit diesem die Schüler ihre Fähigkeiten überprüfen können.

Literaturverzeichnis

[1] Kluge, Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1960

[2] Paetec-Verlag, Berlin, Hypertext: http://www.paetec.de

[3] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 5, paetec-Verlag, 2002

[4] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 5 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 1997

[5] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 6, paetec-Verlag, 2003

[6] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 6 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 1998

[7] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 7, paetec-Verlag, 2003

[8] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 7 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 1999

[9] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 8, paetec-Verlag, 2003

[10] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 8 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 2000

[11] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 9, paetec-Verlag, 2003

[12] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 9 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 2001

[13] Sill, Hans-Dieter, Mathematik 10 - Arbeitsheft, paetec-Verlag, 2002

[14] Sill, Hans-Dieter, Vortrag an der Universität Wien am 09 05 03 im Konversatorium über Probleme des Mathematikunterrichts

[15] Sill, Hans-Dieter, Auszug aus Lehrerhandbuch Mathematik 5, paetec-Verlag, 2003