

## 2 Modellierungsaufgabe *Super Size Me* – Hans Humenberger, Modellieren und Anwendungen im Mathematikunterricht

### 2.1 Aufgabe

In unten stehender Abbildung ist die Angabe zum Modellierungsproblem *Super Size Me* abgebildet. Bei dieser Aufgabe geht es um die Modellierung der Massenzunahme Morgan Spurlocks in einem Selbstversuch, in dem er sich 30 Tage lang ausschließlich von Produkten der Fast-Food-Restaurant-Kette McDonalds ernährt.

Als weitere Informationen sind folgende Daten angegeben:

- tägliche Energiezufuhr: 5.000 kcal (Kilokalorien<sup>1</sup>)
- Masse<sup>2</sup> zu Beginn des Versuches: 84 kg (Kilogramm)
- Masse am Ende des Versuches: 95,5 kg
- keine körperliche Belastung (weniger als 2.000 Schritte täglich)

Die weiteren angegebenen Regeln des Selbstversuches sind für Modellierung der Massenzunahme nicht relevant<sup>3</sup>.

### Modellierungsaufgaben – Workshop

#### *Super Size Me*<sup>1</sup>

In seinem berühmten Film hat sich Morgan SPURLOCK einem Selbstversuch ausgesetzt:

30 Tage Ernährung ausschließlich bei McDonald's, und zwar durchschnittlich 5000 kcal pro Tag, wobei er sich so gut wie keiner körperlichen Belastung aussetzte (weniger als 2000 Schritte pro Tag).

Das Ergebnis des Versuchs war eine Gewichtszunahme von 84 kg auf 95,5 kg.

1. Wie kann die ungefähre Entwicklung des Gewichts in diesen 30 Tagen vor sich gegangen sein? Ist das im Film dargestellte Ergebnis des Experiments realistisch? Falls ja, hätte man die Gewichtszunahme von Morgan SPURLOCK auch im Vorfeld durch ein mathematisches Modell prognostizieren können?
2. Wie würde eine andere Person (z. B. mit Ausgangsgewicht 70 kg) unter vergleichbaren Umständen zunehmen?
3. Wie könnte die Gewichtsentwicklung bei dieser Ernährung weitergehen? Würde sich das Gewicht bei einem bestimmten Wert „einpendeln“? Wenn ja, bei welchem?

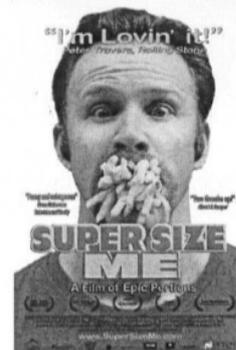


Abbildung 9: Angabe zum Modellierungsproblem *Super Size Me*

1 Die korrekte physikalische Einheit der Energie lautet **Joule**. Da allerdings im täglichen Sprachgebrauch und auch in der verwendeten Literatur die Bezeichnung Kalorien gebraucht wird, verwendet ich diese Einheit bei den durchgeführten Berechnungen.

2 Statt der im Alltag gebräuchlichen (und auch in der Angabe verwendeten) Bezeichnung **Gewicht** verwende ich hier die physikalisch korrekte Bezeichnung **Masse**.

3 Morgen Spurlock musste eine Super-Size-Portion bestellen, wenn er danach gefragt wurde. Effekte bezüglich der Portionsgröße bei Kindern untersucht [6], für weitere psychologische Effekte des Filmes siehe [4].

## 2.2 eigene Modellierung

Grundidee der Modellierung ist folgende. Über die Nahrung wird eine bestimmte Energiemenge aufgenommen. Auf Grund der körperlichen Beschaffenheit (Geschlecht, Alter, Größe und Masse), sowie dem Wissen über die fehlende körperliche Betätigung, lässt sich berechnen, wie viele Kalorien der Körper pro Tag benötigt, um die grundlegenden Vorgänge zur Lebenserhaltung durchführen zu können. Die darüber hinaus gehende Energie in der Nahrung wird in Fett umgewandelt und im Körper gespeichert.

Die in der Literatur am häufigsten verwendete Formel zur Berechnung der Kalorien des menschlichen Grundumsatzes<sup>4</sup> ist die Benedict-Harris-Formel<sup>5</sup> (siehe [8]). Diese lautet für Männer

$$G = 66,4730 + 13,7516 \cdot w + 5,0033 \cdot s - 6,7550 \cdot a ,$$

wobei  $G$  den Grundumsatz in Kilokalorien,  $w$  die Masse in Kilogramm,  $s$  die Größe in Zentimeter und  $a$  das Alter eines Mannes in Jahren angibt. Zur Berechnung des Grundumsatzes sind nun die Daten der Versuchsperson Morgan Spurlocks notwendig.

Das Alter von Herrn Spurlock betrug zum Zeitpunkt des Filmes (2004) 34 Jahre<sup>6</sup>. Die Größe und Masse wurde vor Beginn des Selbstversuches während der Dreharbeiten gemessen. Die Messung ergab eine Größe von 6 Fuß und 2 Inch<sup>7</sup> (umgerechnet und gerundet zu 188 cm) und eine Masse von 185,5 Pfund<sup>8</sup> (gerundet 84,0<sup>9</sup> Kilogramm). Die Endmasse wurde zu 210 Pfund<sup>10</sup> (umgerechnet und gerundet 95,5 Kilogramm) bestimmt.

Dies führt beim Hauptdarsteller zu einer linearen Funktion für den Kaloriengrundverbrauch in Abhängigkeit von seiner Masse, der Funktionsterm lautet

$$G(w) = 66,4730 + 13,7516 \cdot w + 5,0033 \cdot 188 - 6,7550 \cdot 34 = 777,4234 + 13,7516 \cdot w .$$

Für den ersten Tag ergibt das einen Kalorienverbrauch von

$G(84,0) = 777,4234 + 13,7516 \cdot 84,0 \approx 1.933$  kcal. Jetzt muss noch der Kalorienverbrauch seiner (geringen, aber doch vorhandenen) Bewegung mit eingerechnet werden. Herr Spurlock soll weniger als 2.000 Schritte pro Tag gehen. Angenommen er erreicht dieses Maximum jeden Tag, muss für diese Anzahl von Schritten der Kalorienverbrauch abgeschätzt werden.

Laut [22] verbraucht ein Mann mit 90 kg beim Gehen mit einer Geschwindigkeit von 3 Kilometer pro Stunde (was einer *normalen* Gehgeschwindigkeit entspricht) rund 300 kcal pro Stunde, also pro 1.000 Meter rund 100 kcal. Mit der aus [11] entnommenen Formel<sup>11</sup>  $y = 2,16 \cdot x + 15,22$  lässt sich durch Umformung zu  $\frac{y - 15,22}{2,16} = x$  die Schrittlänge in Abhängigkeit von der Körpergröße mit 80 cm für die Versuchsperson bestimmen.

Damit legt Herr Spurlock  $2.000 \cdot 0,8 = 1.600$  Meter zurück, was einem Kalorienverbrauch von rund 160 kcal entspricht. Zusätzlich zu seinem oben berechneten Grundumsatz verbraucht der Hauptdarsteller also zusätzlich diese Energie.

---

4 Dabei handelt es sich um jene Energiemenge, die ein Körper braucht, um die lebensnotwendigen Vorgänge zur Lebenserhaltung durchführen zu können. Für weitere Informationen zu diesem Thema, sowie zum Leistungsumsatz (zusätzlicher Energieverbrauch bei körperlicher Betätigung), siehe [1].

5 Diese Formel wurde im Laufe der Zeit immer wieder überprüft und angepasst, siehe [17] und [13]. Allerdings ist die Ursprungsformel noch immer in Gebrauch und liefert die besten Ergebnisse. Es gibt für Männer und Frauen zwei unterschiedliche Formeln. Zu beachten ist, dass mit zunehmenden Alter der Energiebedarf des Menschen abnimmt.

6 siehe [http://de.m.wikipedia.org/wiki/Morgan\\_Spurlock](http://de.m.wikipedia.org/wiki/Morgan_Spurlock) (24 04 16)

7 siehe [18], TC 00:09:38 – 00:09:45

8 siehe [18], TC 00:10:24 – 00:10:31

9 Aus der Angabe lässt sich schließen, dass die Massen auf halbe Kilogramm gerundet angegeben sind.

10 siehe [18], TC 01:29:15 – 01:29:37

11  $y$  steht hier für die Körpergröße und  $x$  für die Schrittlänge, beides in Zentimeter.

Bei einer Aufnahme von 5.000 kcal verbraucht Herr Spurlock nun  $1.933+160=2.093$  kcal am ersten Tag des Versuches, er nimmt also  $5.000-2.093=2.907$  Kilokalorien mehr auf als er für die Erhaltung der Körperfunktionen benötigt. Diese überschüssige Energie wird in seinem Körper als Fett gespeichert.

Nun ist zu berechnen welcher Massenzunahme dieser Energieüberschuss entspricht. Die Kalorienwerte für ein Kilogramm Körperfett variieren doch deutlich, wenn man auf den entsprechenden Seiten im Internet nachschaut. Werte zwischen 7.000 und 9.000 kcal<sup>12</sup> werden dort genannt. Der Brennwert eines Kilogramm Fettes wird mit rund 9.000 Kilokalorien angegeben. Da aber Wasser eingelagert ist, besteht Körperfett nur zu rund 85 Prozent aus Fett<sup>13</sup>, was einen Kalorienwert von  $9.000 \cdot 0,85=7.650$  kcal ergibt, welchen ich für meine Berechnungen verwendet habe.

Morgan Spurlock vergrößert daher seine Masse am ersten Tag um rund  $\frac{2.907}{7.650} \approx 0,38$  kg. Für jeden weiteren Tag lässt sich nun die benötigte Kalorienmenge für den Grundumsatz und den Leistungsumsatz für seine maximal 2.000 Schritte berechnen. Daraus lässt sich wiederum ableiten wie hoch die Einlagerung von Fettmasse und dadurch die Erhöhung seiner Gesamtmasse ist.

Mathematisch wird dies mittels der Verwendung der Tabellenansicht (siehe Abbildung 10) in GeoGebra erreicht.

	A	B	C	D
1				
2				
3	<b>Zeit</b>	<b>Masse</b>	<b>Überschuss</b>	<b>Fett</b>
4	0	84	2907.4422	0.3801
5	1	84.3801	2902.2158	0.3794
6	2	84.7594	2896.9988	0.3787
7	3	85.1381	2891.7912	0.378
8	4	85.5161	2886.5929	0.3773
9	5	85.8935	2881.404	0.3767
10	6	86.2701	2876.2244	0.376
11	7	86.6461	2871.0541	0.3753
12	8	87.0214	2865.8931	0.3746
13	9	87.396	2860.7414	0.374
14	10	87.77	2855.5989	0.3733
15	11	88.1433	2850.4657	0.3726
16	12	88.5159	2845.3417	0.3719
17	13	88.8878	2840.227	0.3713
18	14	89.2591	2835.1214	0.3706
19	15	89.6297	2830.025	0.3699

Abbildung 10: Tabellenansicht des GeoGebra-Files

12 siehe z. B. <http://www.sueddeutsche.de/leben/fitness-schneller-weiter-leichter-1.239643> (24 04 16) oder <http://www.gutefrage.net/frage/wie-viel-kalorien-sind-1kg-koerperfett> (24 04 16)

13 siehe <https://www.quora.com/How-many-calories-are-there-per-gram-of-body-fat> (25 04 16) oder <https://www.paleohacks.com/weight-loss/are-there-really-7700-calories-in-a-kilo-of-bodyfat-21647> (25 04 16) bzw. <http://fitness.stackexchange.com/questions/193/how-many-calories-to-burn-daily-to-see-a-change-in-weight-within-a-month> (25 04 16)

Dabei steht die erste Spalte (Zeit) für den Tag des Versuches, die zweite Spalte für die Masse von Morgan Spurlock am Beginn des entsprechenden Tages, die dritte Spalte für den Energieüberschuss in Kilokalorien und die vierte Spalte für die eingelagerte Fettmasse in Kilogramm.

Die modellierte Differenzgleichung für die Masse lautet

$$m_{t+1} = m_t + \frac{4.840 - 777,4234 - 13,7516 \cdot m_t}{7.650} \quad \text{mit } m_0 = 84,0 . \quad \text{Mit } m_0 \text{ wird der Startwert, in diesem}$$

Fall die Anfangsmasse von Herrn Spurlock bezeichnet. Der Wert 4.840 setzt sich aus der zugeführten Kalorienmenge (5.000 kcal) abzüglich der verbrauchten Energie durch die 2.000 Schritte zusammen (160 kcal). Der Term  $777,4234 - 13,7516 \cdot m$  beschreibt sein Grundumsatz-Kalorienverbrauch laut Benedict-Harris-Formel, der von dem vorher ermittelten Kalorienwert abzuziehen ist. Abschließend wird noch durch die Kalorienzahl für ein Kilogramm Körperfett dividiert, um eine Masse zu erhalten, welcher zur Masse der Versuchsperson vom Vortag addiert wird.

Die Tabelle in Abbildung 11 zeigt die Entwicklung der Masse des Hauptdarstellers in Abhängigkeit von der Zeit mit oben beschriebenen Spaltenbedeutungen.

Zeit [Tag]	Masse [kg]	Überschuss [kcal]	Fett [kg]
0	84,0	2907	0,38
1	84,4	2902	0,38
2	84,8	2897	0,38
3	85,1	2892	0,38
4	85,5	2887	0,38
5	85,9	2881	0,38
6	86,3	2876	0,38
7	86,6	2871	0,38
8	87,0	2866	0,37
9	87,4	2861	0,37
10	87,8	2856	0,37
11	88,1	2850	0,37
12	88,5	2845	0,37
13	88,9	2840	0,37
14	89,3	2835	0,37
15	89,6	2830	0,37
16	90,0	2825	0,37
17	90,4	2820	0,37
18	90,7	2815	0,37
19	91,1	2810	0,37
20	91,5	2805	0,37
21	91,8	2800	0,37
22	92,2	2795	0,37
23	92,6	2790	0,36
24	92,9	2785	0,36
25	93,3	2780	0,36
26	93,7	2775	0,36
27	94,0	2770	0,36
28	94,4	2765	0,36
29	94,7	2760	0,36
30	95,1	2755	0,36
31	95,5		

**Abbildung 11:** Entwicklung der modellierten Masse für Morgan Spurlock

Die Masse des Hauptdarstellers am Ende des Versuchszeitraumes (also zu Beginn des 31. Tages)

beträgt 95,5 Kilogramm, also genau diejenige Masse, die beim Abwiegen am Ende festgestellt wurde.

Bei dieser Art von Massenzunahme handelt es sich um ein beschränktes Wachstum. Die Zunahme pro Tag wird immer geringer, es wird also nach einer bestimmten Zeitspanne eine Schranke, in diesem Fall eine Maximalmasse, erreicht. Diese Höchstmasse lässt sich berechnen, indem man jene Masse ermittelt, bei der der Grundumsatz genau der zugeführten Kalorienanzahl entspricht. Dabei wird angenommen, dass der Energieverbrauch für die Bewegung annähernd konstant bleibt. Dies ist vertretbar, weil der Energiebedarf bei der Bewegung (Gehen) von der Masse der Person abhängt, die Anzahl der Schritte aber sicherlich mit der Massenzunahme geringer wird.

Die Höchstmasse<sup>14</sup> lässt sich durch die Gleichung  $4.840 = 777,4234 + 13,7516 \cdot m$  bestimmen. Die obere Schranke mit den in diesem Versuch vorgegeben Parametern lautet  $s = 295,5$  kg.

Die Funktion  $m$ , welche dieses beschränkte Wachstum<sup>15</sup> beschreibt, besitzt die Termdarstellung  $m(t) = s - (s - m_0) \cdot e^{-k \cdot t}$ , mit eingesetzten Parametern  $m(t) = 295,5 - 211,5 \cdot e^{-k \cdot t}$ . Jetzt ist noch der Faktor  $k$  im Exponenten der Exponentialfunktion zu bestimmen.

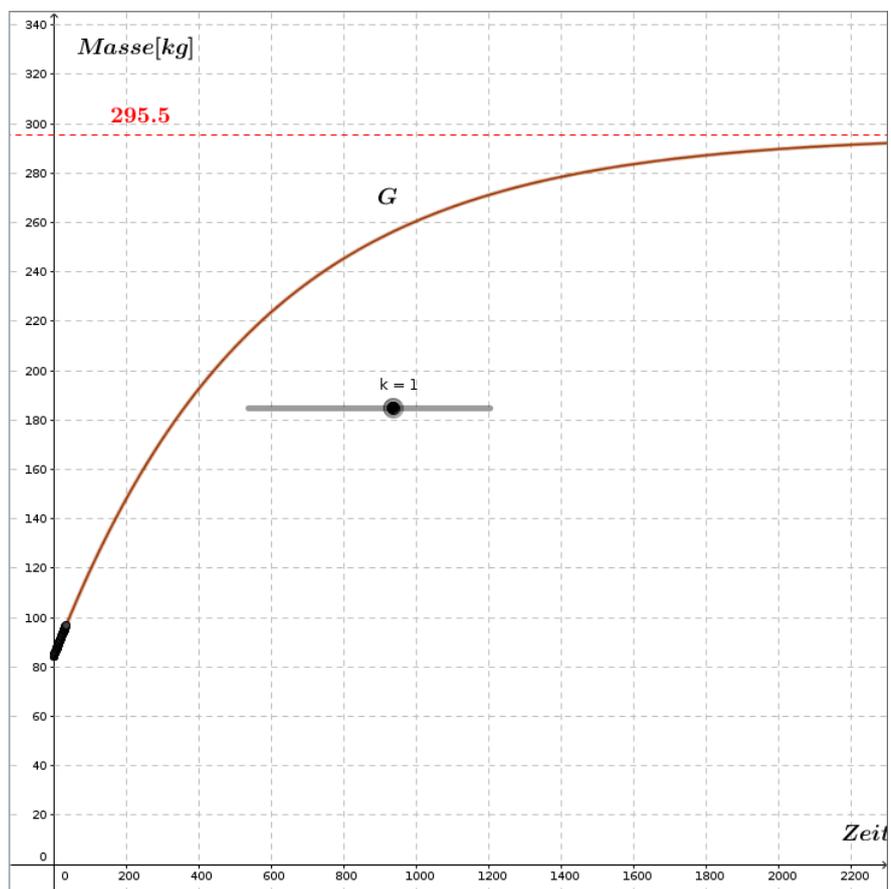


Abbildung 12: Graph der ermittelten Funktion für das beschränkte Wachstum der Körpermasse von Morgan Spurlock

Mit Hilfe des Befehls `Trend[ <Liste von Punkten>, <Funktion> ]` lässt sich in GeoGebra der fehlende Parameter beziehungsweise die Funktionsgleichung selbst ermitteln. Dazu ist zuvor ein

14 Diese Höchstmasse ist die Antwort auf Frage 3 der Angabe.

15 siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Beschr%C3%A4nktes\\_Wachstum](https://de.wikipedia.org/wiki/Beschr%C3%A4nktes_Wachstum) (28 04 16)

Schieberegler zu erstellen und mit den Standardeinstellungen festzulegen. Der Wert dieses Schieberegler dient als Saatwert<sup>16</sup> zur numerischen Ermittlung jenes Parameterwertes der am beste die gegebenen Datenwerte (Punkte) fittet. Diese Punkte sind mittels Liste aus der Tabellenansicht zu übernehmen. Die so ermittelte Funktion  $m$  lautet  $m(t) = 295,5 - 211,5 \cdot e^{-0,00180 \cdot t}$ . Der Graph der Funktion ist in Abbildung 12 angegeben. Die GeoGebra-Datei zu dieser Aufgabe ist unter [http://www.matkit.at/mentoring/super\\_size\\_me](http://www.matkit.at/mentoring/super_size_me) zur Verfügung gestellt.

Zur Beantwortung von Frage 2 der Angabe nimmt man die Funktion  $m$  und modifiziert entsprechend der Anfangsmasse  $m_0$  den Koeffizienten vor dem Exponentialterm laut  $295,5 - m_0$ . Die Grenzmasse bleibt dieselbe. Eine Person mit der Anfangs Masse  $m_0 = 70$  kg würde in der Versuchsphase innerhalb von 30 Tagen diese auf 82,0 kg vergrößern.

Für den Verlauf der Graphen mit den Anfangsmassen 70 kg sowie 84 kg siehe Abbildung 13. Eine GeoGebra-Datei mit einem Schieberegler für die Anfangsmasse  $m_0$  ist unter oben angegebener Internet-Adresse abrufbar.

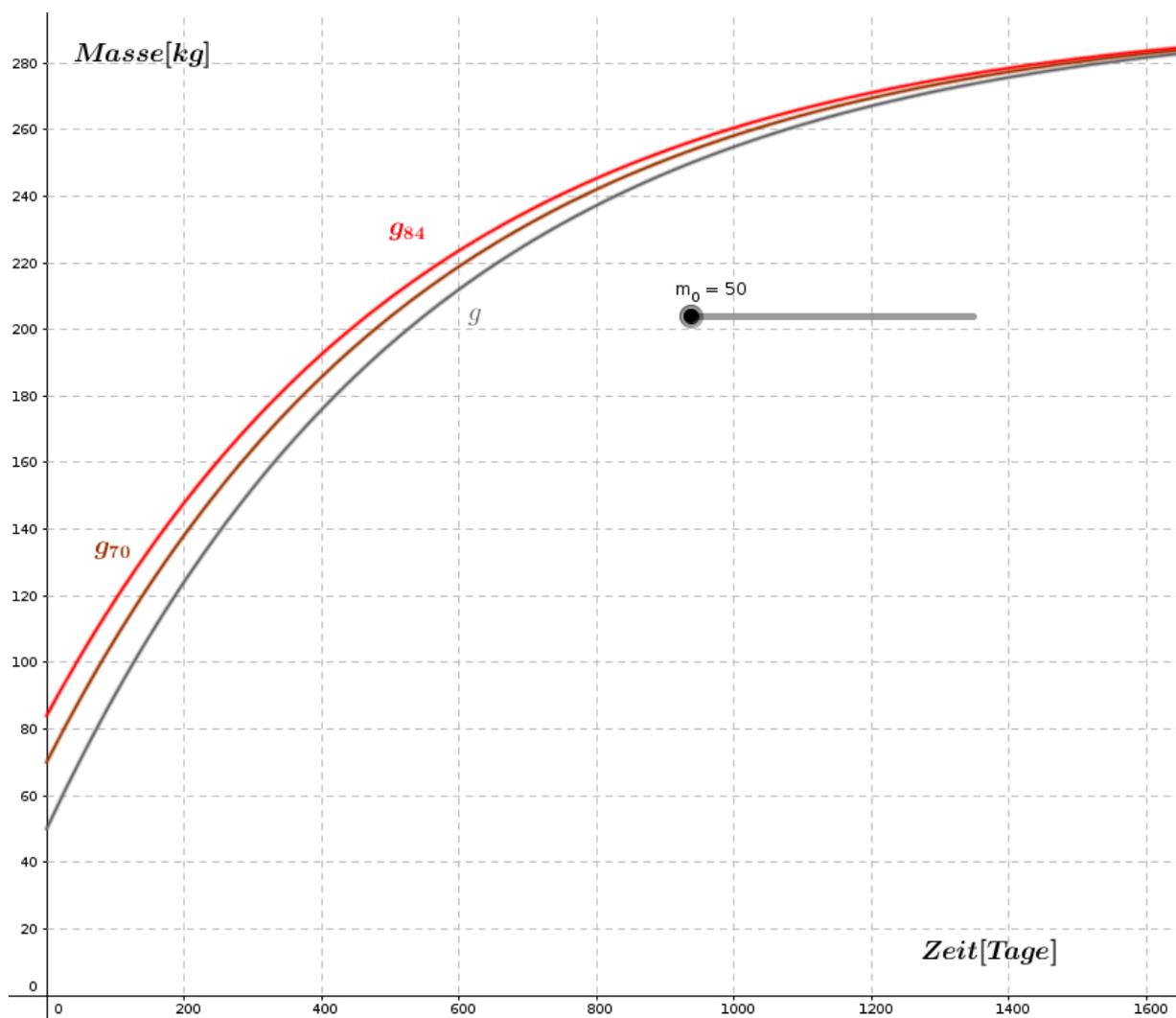


Abbildung 13: Graph der Massenzunahme mit unterschiedlichen Anfangsmassen

<sup>16</sup> Hier ist ein Startwert (*seed*) für jenes Verfahren gemeint, mit dem GeoGebra intern die entsprechende Funktion approximiert.

## 2.3 weitere Informationen

Der Selbstversuch von Morgan Spurlock scheint ein ideales Beispiel zu sein, um Schüler und Schülerinnen für das Modellieren von mathematischen Zusammenhängen zu begeistern. Sowohl US- (siehe [14]) als auch österreichische Quellen (siehe [15] und [16]) haben sich bereits dieses Themas angenommen.

Weiterführende Informationen zum Thema Fast Food wurden speziell von Ö1 für die Schule aufgearbeitet (siehe [21]).

Für weitere Informationen zum Thema Modellierung im Allgemeinen und zum Thema *Super Size Me* im Besonderen sind [5], [7], [9] und [10], sowie [19] und [20] empfohlen.